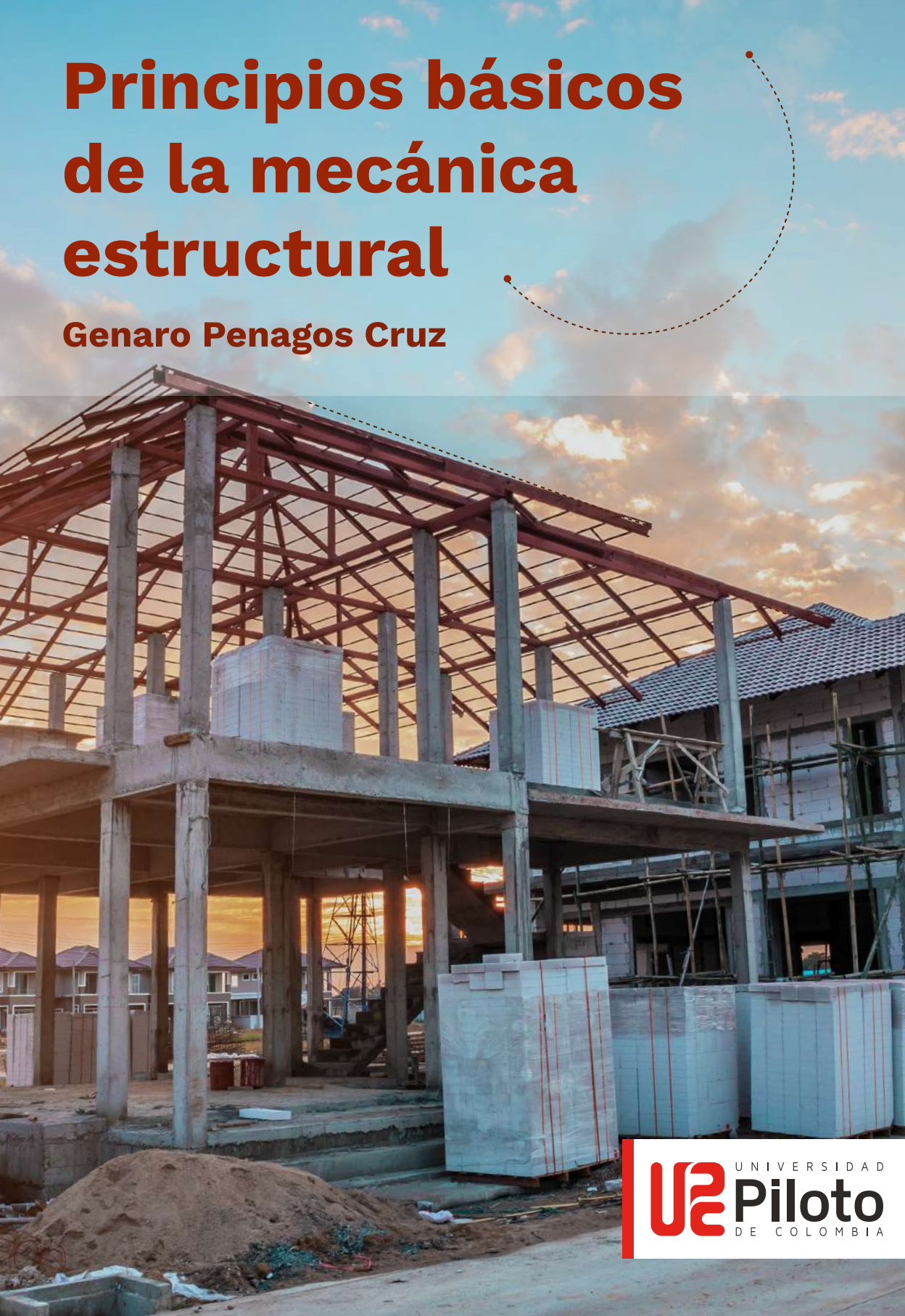
Principios básicos de la mecánica estructural

Genaro Penagos Cruz



UNIVERSIDAD Piloto DE COLOMBIA

Penagos Cruz, Genaro

Principios básicos de la mecánica estructural / Genaro Penagos Cruz.
Bogotá: Universidad Piloto de Colombia, 2023

85 Páginas.

Incluye referencias

ISBN: 978-958-5106-95-6

1. Análisis estrutural (Ingeniería)

2. Estructuras - Mecánica

3. Estructuras -- Teorías

CCD: 624.17

Presidente
Olinto Eduardo Quiñones Quiñones

Rectora
Ángela Gabriela Bernal Medina

Director de Publicaciones y Comunicación Gráfica
Rodrigo Lobo-Guerrero Sarmiento

Director de Investigaciones
Mauricio Hernández Tascón

Coordinador General de Publicaciones
Diego Ramírez Bernal

Director del Programa de Ingeniería Civil
Óscar Daniel Guifo Roldan

Autor
Genaro Penagos Cruz

ISBN
978-958-5106-95-6

Primera edición – 2023
Bogotá, Colombia

Editor
Nancy Liliana Rodríguez V.

Diseño y diagramación
María Paula Martín
(Dpto. de Publicaciones y Comunicación Gráfica)

OPEN ACCES

Atribución - No comercial - Sin derivar: Esta licencia es la más restrictiva de las seis licencias principales, sólo permite que otros puedan descargar las obras y compartirlas con otras personas, siempre que se reconozca su autoría y al sello editorial pero no se pueden cambiar de ninguna manera ni se pueden utilizar comercialmente.

Universidad Piloto de Colombia

© Mecánica Estructural

La obra literaria publicada expresa exclusivamente la opinión de sus respectivos autores, de manera que no representa el pensamiento de la Universidad Piloto de Colombia. Cada uno de los autores, suscribió con la Universidad una autorización o contrato de cesión de derechos y una carta de originalidad sobre su aporte, por tanto, los autores asumen la responsabilidad sobre el contenido de esta publicación.

Contenido

1. **Presentación al lector** 6

1.1. Intención formativa 8

1.2. Justificación 8

1.3. Meta de aprendizaje 8

1.4. Problemas por resolver 8

1.5. Competencias por desarrollar 8

2. **Unidades** 10

2.1. Múltiplos y submúltiplos 12

2.2. Conversiones 14

2.3. Ejercicios de aplicación 15

3. **Vectores** 17

3.1. Representación de un vector 19

3.2. Aplicaciones 23

3.3. Operaciones con vectores 27

3.4. Producto escalar 36

3.5. Producto vectorial 39

3.6. Ejercicios de aplicación por resolver 42

4. **Aplicación de vectores en sistemas coplanares en equilibrio** 44

4.1. Otros ejemplos de sistemas en equilibrio 52

4.2. Ejercicios de aplicación propuestos 70

5. Referencias 75
Bibliografía complementaria 76
6. Anexos 77
6.1. Alfabeto griego 78
6.2. Conceptos básicos de trigonometría 79
6.3. Geometría básica 81
6.4. Análisis de la línea recta 83
6.5. Cálculos básicos en geometría 85

Presentación al lector

Como parte de la física, la mecánica busca interpretar los fenómenos físicos de cuerpos sometidos a perturbaciones de tipo mecánico, lo cual es un fundamento básico para un análisis ingenieril. Para ello, es importante tener los conceptos básicos y la capacidad de interpretar esquemas de fuerzas, fundamento del análisis y calculo estructural.

Los conceptos previos requeridos para el inicio del proceso de cálculo en mecánica vectorial están enmarcados en los conceptos de unidades, operación con vectores, análisis y solución de sistemas de ecuaciones, y tener una noción básica de representación en 2 y 3 dimensiones

Esta cartilla es un material didáctico el cual busca ser un refuerzo y un complemento en el proceso de enseñanza y aprendizaje del curso mecánica estructural; de tal forma, que ayude a disminuir la dificultad mostrada en la mecánica, la cancelación permanente y la mortalidad académica.

Este material es propicio para iniciar los procesos de cálculo básico y principios fundamentales de la mecánica estructural, pues inicia con la concepción básica de unidades y los métodos vectoriales; estos conceptos son fundamentales para el análisis de fuerzas en sistemas estáticamente determinados. De esta manera, se brinda a los estudiantes mecanismos que facilitan la interpretación y el análisis de esquemas básicos de aplicación, así mismo, se ofrece una estructura procedimental para el desarrollo de las aplicaciones.

1.1. Intención formativa

Esta cartilla se realiza con el objetivo de ofrecer una herramienta de trabajo complementario para el proceso de aprendizaje del espacio académico de Mecánica Estructural. Para tal fin, se abordarán los temas de unidades, vectores y análisis de cuerpos en equilibrio, además se dejarán algunos ejercicios que buscan estructurar el procedimiento de análisis e interpretación.

1.2. Justificación

Los conceptos que la mecánica estructural ofrece al estudiante de ingeniería civil pretenden incorporarlo en la interpretación de fenómenos físicos en condiciones de equilibrio estático, propios de la ingeniería.

Estos conceptos, a parte de su interpretación, requieren cierto grado de habilidad es su aplicación, si se tiene en cuenta que son procesos repetitivos de cálculo, en los que la aproximación y el error deben reducirse o eliminarse para lograr exactitud en los resultados. Es aquí donde el manejo de unidades, procesos de conversión, equivalencias, representación de sistemas de fuerza y el cálculo de las variables, son el centro de atención.

1.3. Meta de aprendizaje

El estudiante debe interpretar y aplicar los conceptos básicos de la mecánica estructural, considerando que para lograrlo debe graficar, calcular e interpretar los resultados obtenidos.

1.4. Problemas por resolver

Reducir la dificultad de interpretación, representación y cálculo de fenómenos en condiciones estáticas de la ingeniería civil.

1.5. Competencias por desarrollar

a. Conoce y aplica los sistemas de unidades inglés e internacional.

b. Determina el procedimiento más adecuado para aproximar y especificar la cantidad de cifras significativas por emplear.

c. Interpreta los procedimientos a fin de realizar conversiones entre los sistemas mediante la utilización de las equivalencias.

d. Conoce y aplica los conceptos de vectores a fenómenos simples de sistemas de fuerza en equilibrio.

2. Unidades

Todo fenómeno físico requiere ser identificado y representado para su análisis, lo cual requiere de abstracciones representadas en dimensiones básicas: longitud, masa y tiempo. Expresiones de tipo cuantitativo que permite medir el objeto y, de esta forma, determinar las dimensiones relevantes para su representación y análisis; para ello se utilizan diferentes instrumentos de medición que emplean escalas proporcionadas al tamaño del objeto. Por ejemplo, el metro, el kilogramo y el segundo, son los patrones más comúnmente empleados y corresponden al sistema internacional de medidas: Unidades SI

Tabla 1. Sistemas de Unidades

Dimensiones básicas	Sistemas de unidades		
	SI	C.G.S	Inglés
Longitud	metro	centímetro	Milla
			Yarda
			Pie
			Pulgada
Masa	kilogramo	gramo	Slug
			Tonelada
			Libra- masa
			Onza
Volumen	metro cúbico	centímetro cúbico	Pie Cúbico
			Galón
Fuerza	Newton	Newton	Libra
			kip

Fuente: Elaboración propia

Además de la longitud, la masa y el tiempo, existen otras cuatro unidades fundamentales: la corriente eléctrica (ampere), temperatura termodinámica (kelvin), la intensidad luminosa (candela) y la cantidad de sustancia (mol).

Es importante, aparte de conocer las unidades básicas en el SI y el Sistema Inglés, conocer las diferentes magnitudes dimensionales secundarias o unidades derivadas, como la velocidad, expresadas en m/s; la fuerza en

Newton (kg $*$ m/s^2) que, expresado en forma general, equivale a la masa (kg) por la gravedad (m/s^2). En seguida se muestran las unidades secundarias más empleadas en la ingeniería.

Tabla 2. Dimensiones secundarias

Nombre	Símbolo	Símbolo
Área o superficie	A	m^2
Volumen	V	m^3
Velocidad	v	m/s
Aceleración	a	m/s^2
Fuerza	F	N
Densidad, masa en volumen	ρ	kg/ m^3
Densidad superficial	ρA	kg m^2
Volumen especifico	v	m^3 /kg
Trabajo	w	N m
Esfuerzo	σ	N/m^2 o Pa

Fuente: Elaboración propia

2.1. Múltiplos y submúltiplos

Al expresar diferentes magnitudes en ingeniería, resulta útil el empleo de prefijos del Sistema Internacional (SI), múltiplos y submúltiplos mostrados en la Tabla 3 y 4; por otra parte, para grandes o pequeñas magnitudes básicas o derivadas, se expresan en notación científica.

Tabla 3. Submúltiplos del sistema internacional

Múltiplo	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	D
10^{-2}	centi	C
10^{-3}	mili	M
10^{-6}	micro	µ

10^{-9}	nano	N
10^{-12}	pico	P
10^{-15}	femto	F
10^{-18}	atto	A
10^{-21}	zepto	Z
10^{-24}	yocto	Y

Fuente: (Tippens, 2011, p. 39)

Tabla 4. Múltiplos del sistema internacional

Múltiplo	Prefijo	Símbolo
10^{1}	deca	Da
10^{2}	hecto	H
10^{3}	kilo	K
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Fuente: (Tippens, 2011, p. 39)

Cuando se realizan operaciones entre unidades, no siempre el resultado es una cantidad exacta, ya que se obtienen resultados con decimales y éstos pueden ser periódicos puros, periódicos mixtos o números no exactos y no periódicos, en estos casos es necesario aproximar correctamente.

Para realizar la aproximación existen varios métodos, incluso, es siempre conveniente aproximar por redondeo, donde las cifras significativas dependerán de las unidades operadas.

Por ejemplo:

Si 1 pulg. = 25,54 mm = 0,02554 m = 0.0833 pies, en las cuatro expresiones se trabaja con cuatro cifras significativas, sin embargo, si se emplea este valor de 0,0833 pies para expresarlo nuevamente a pulgadas, éste equivale a 0,9996 plug., por lo tanto, se tendría un error de 0,04% cuatro diezmilésimas, que representaría un error aceptable. En este caso trabajar con menos cifras significativas no es aconsejable.

2.2. Conversiones

Para expresar y operar diferentes unidades básicas o derivadas o de un sistema a otro, es necesario realizar cambios de escala. Esto implica conocer las diferentes equivalencias entre cada una de ellas. Estas equivalencias permiten unificar la unidad, la cual puede estar representada en uno de los dos sistemas: el internacional o el inglés. En la Tabla 5 se muestran algunas de las equivalencias más empleadas para obtener diferentes relaciones entre las cantidades que plantea el esquema a analizar.

Tabla 5. Equivalencias entre el sistema Inglés y el internacional

Magnitud	Unidad Sistema Inglés	Sistema internacional	
		Equivalencia	Unidad
Longitud	Milla	1609	m
	Yarda	0,914	m
	Pie	0,3048	m
	Pulgada	0,0254	m
Masa	Slug	14,59	kg
	Tonelada	1000	kg
	Libra- masa	0,453	kg
	Onza	0,02835	kg
Volumen	Pie Cúbico	28,32	L
	Galón	3,785	L
Fuerza	Libra	4,448	N
	kip	4,448	KN

Fuente: Elaboración propia

Para realizar el cálculo numérico es necesario identificar correctamente la unidad y conocer su equivalencia con el fin de simplificar las unidades iniciales, por ejemplo: si se desea pasar de 150 m/s a Km/h, se sabe que una hora tiene 3600 s y que 1000 m equivalen a un kilómetro, luego se plantean las relaciones anteriores y se cancelan las unidades en la siguiente forma.

$$150\ \frac{m}{s} * \frac{3600\ s}{1\ h} * \frac{1\ km}{1000\ m} = 540\ \frac{km}{h}$$

Es importante definir la cantidad de cifras decimales para efectos de realizar operaciones, ésta siempre debe ser igual.

2.3. Ejercicios de aplicación

2.3.1. Complete la siguiente tabla trabajando con cinco cifras significativas.

Tabla 6. Ejercicios de práctica

Unidad						
millas	**cm**	**m**	**mm**	**yardas**	**km**	**pies**
0,93732						
	2,0833					
			8,7868			
					0,0669	
		3,9531				
						214,75
				12,458		

Fuente: Elaboración propia

2.3.2. Empleando la información anterior, realice los siguientes ejercicios:

a. Exprese 200 m en: Km, Pulgadas, pies y millas

b. Exprese 347 N/m^2 en Pa, Lb/pie^2 y kg s^{-2}/m

c. Un tanque de $2 * 3\ m^2$ de base y 1,2 m de altura (medidos interiormente), se emplea para almacenar agua. Determine el volumen almacenado de agua y expréselo en m^3, galones, litros, pulgadas cubicas y pies cúbicos.

d. Para el ejercicio anterior, ¿cuál será la reducción de su capacidad si la pared del tanque es de 8 mm y sólo se llena al 96 % de su volumen?

2.3.3. Se requiere llenar un tanque de 120 m^2 y 1,7 m de altura. Para esto se cuenta con una manguera de 1″ de diámetro. Si el caudal de agua es de 15 litros por minuto, calcule:

a. ¿Cuánto tardaría en llenarse el tanque?

b. ¿Cuál sería el volumen de agua almacenado en cm^3?

2.3.4. Al expresar cantidades en pulgadas es necesario emplear fracciones de pulgada de acuerdo con los estándares establecidos, entonces, ¿cuál debería ser el procedimiento para expresar una cantidad dada en milímetros en fracciones de pulgada? Exprese 19,45 mm y 32,28 mm en pulgadas empleando el procedimiento deducido anteriormente.

3. Vectores

En mecánica un cuerpo puede estar sometido a una, dos o más fuerzas que generen en él equilibrio o movimiento. Estas fuerzas se pueden mostrar actuando sobre la partícula como vectores mediante esquemas gráficos (diagramas de cuerpo libre), para lograr operarlos a través de métodos vectoriales. Por ejemplo, en la Figura 1, si un objeto de masa 50 kg es arrastrado empleando dos cuerdas CA y CB, el sistema de fuerzas representado mediante vectores será:

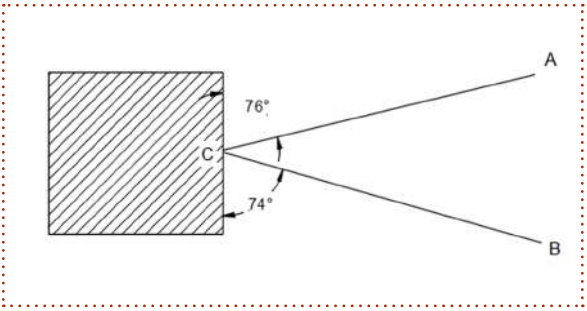


Figura 1. Sistemas de fuerzas

Fuente: Elaboración propia

Se emplea un sistema cartesiano para ubicar los vectores especificando la información conocida. Teniendo en cuenta que es un sistema en equilibrio, W representa la fuerza equivalente de la suma de los dos vectores, y su magnitud estará dada por la fuerza de fricción equivalente a la normal por el coeficiente de fricción estático ($F_f = m \quad g \quad \mu_s$).*

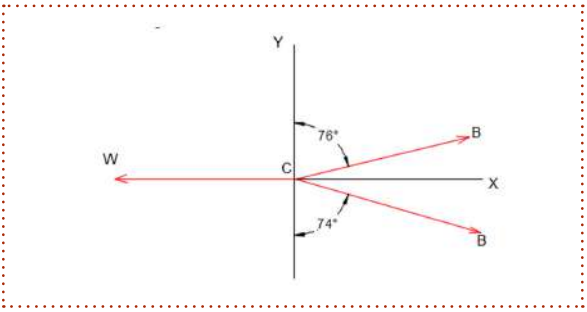


Figura 2. Diagrama de fuerzas

Fuente: Elaboración propia

Es importante la geometría que describe la ubicación y el sentido de los vectores, debido a que ésta permite descomponer cada uno de los vectores en sus componentes rectangulares, paso necesario para la posterior operación.

3.1. Representación de un vector

3.1.1. Forma escalar

Un vector presentado en forma escalar se expresa mediante tres elementos: su magnitud, su dirección y su sentido. Si el vector B = (3,4), su representación nos muestra un vector en el plano ubicado en el primer cuadrante, según como se muestra en la Figura 3. Su magnitud se calcula al aplicar el teorema de Pitágoras, el cual plantea que la magnitud se puede calcular como la raíz cuadrada de la suma de sus componentes elevadas al cuadrado.

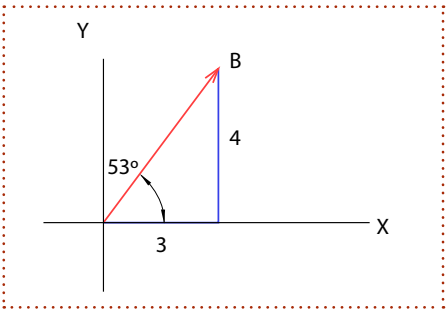


Figura 3. Representacion del vector en R2

Fuente: Elaboración propia

Teorema de Pitagoras

$a^2+b^2=c^2$, donde a y b son las componentes rectangulares y c es la hipotenusa.

La magnitud $C = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

Remplazando $C = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$

El ángulo se calcula: $Tang\ \alpha = \frac{4}{3}$

Despejando:

$$\alpha = Tang^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^{o}$$

$$B = 5 < 53,13^{o}$$

3.1.2. Forma vectorial

Un vector presentado en forma vectorial cartesiana se expresa a través de sus componentes rectangulares, así:

$$B = \mathbf{3i+4j+0k}$$

Donde i, j y k representan las componentes unitarias de los ejes x, y, z, (ver Figura 4). Un vector es unitario cuando su magnitud es igual a 1.

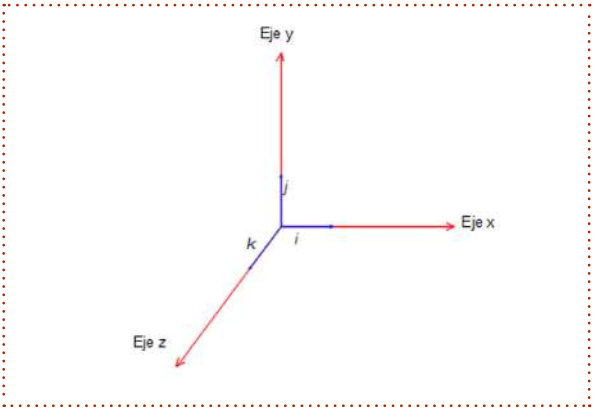


Figura 4. Componentes unitarias en R3

Fuente: Elaboración propia

Para expresa cada componente del vector en tres dimensiones, se emplean los cosenos directores de la siguiente forma:

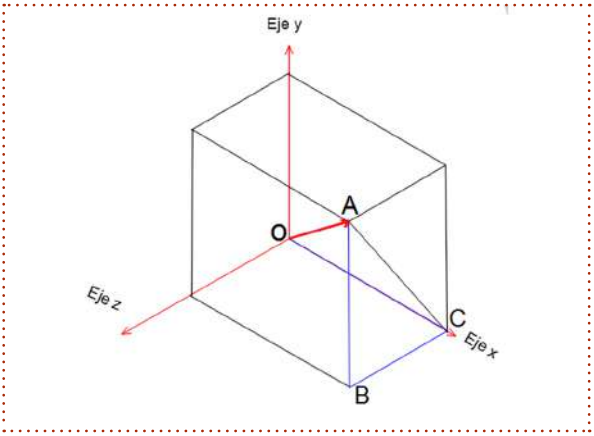


Figura 5. Representación del vector en R3

Fuente: Elaboración propia

Para el triángulo OAC, como se puede apreciar en la siguiente Figura, el ángulo en A es un ángulo recto (90^0), lo cual implica que este triángulo es rectángulo. Al aplicar la identidad del coseno se obtiene

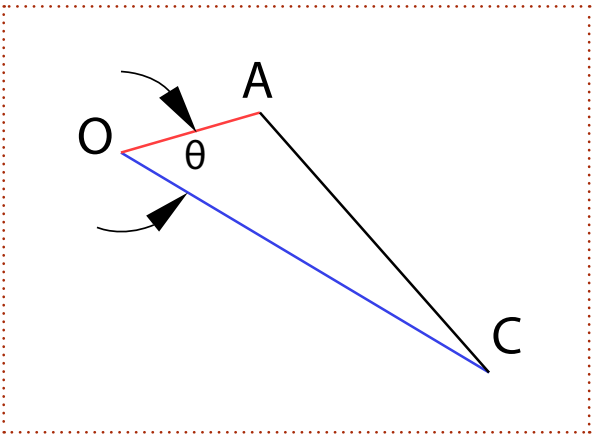


Figura 6. Descomposición del vector en sus ejes cartesianos

Fuente: Elaboración propia

Para el triángulo OAC, el ángulo en A es recto (90^0), lo cual implica que este triángulo es rectángulo. Aplicando la identidad del coseno:

$$Cos\ \theta = \frac{OC}{OA}$$

Donde OA es el vector V y OC es la componente en x del vector Vx

$$Cos\ \theta = \frac{Vx}{V}$$

$$Vx = V\ Cos\ \theta$$

Luego, si se realiza el triángulo OAB es posible obtener Vy. De igual forma se pueden obtener la componente Vz. La expresión general del vector será:

$$\vec{V} = Vx\ i + Vy\ j + Vz\ k$$

$$\vec{V} = VCos\ \theta x\ i + VCos\ \theta y\ j + VCos\ \theta z\ k$$

$$\vec{V} = V\ (Cos\ \theta x\ i + Cos\ \theta y\ j + Cos\ \theta z\ k)$$

Donde V es la magnitud del vector y Cos θx i+Cos θy j+Cos θz k, es el vector unitario.

Nótese que cada componente tiene un ángulo diferente, el cual se puede obtener a partir de las componentes y la magnitud del vector:

$$\boldsymbol{Cos\ \theta i = \frac{Vi}{V}}$$

$\theta x = Cos^{-1}\left(\frac{Vx}{V}\right)$: Ángulo del vector con respecto al eje x

$\theta y = Cos^{-1}\left(\frac{Vy}{V}\right)$: Ángulo del vector con respecto al eje y

$\theta z = Cos^{-1}\left(\frac{Vz}{V}\right)$: Ángulo del vector con respecto al eje z

Los vectores o ángulos directores cumplen con la identidad:

$$Cos^2\ \theta x + Cos^2\ \theta y + \boldsymbol{Cos^2}\ \theta z = 1$$

3.2. Aplicaciones

3.2.1. Dado el vector V = 3i + 4j – 2k. Encuentre los ángulos directores y su vector unitario.

La magnitud de $V = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$, es mejor trabajarla con radicales, esto genera una mayor precisión en los resultados

$$\theta x = Cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) = 56{,}14^o$$

$$\theta y = Cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right) = 42{,}03^o$$

$$\theta z = Cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right) = 111{,}80^o$$

Luego la expresión general del vector es:

$$\vec{V} = \sqrt{29}\,(Cos\ 56.14\ i + Cos\ 42.03\ j + Cos\ 11.80k)$$

$$\vec{V} = \sqrt{29}\ \underbrace{(0.5572\ i + 0.7428\ j - 0.3714\ k)}_{\text{Representa el Vector unitario}}$$

Si se verifica el vector unitario, es posible apreciar por qué es necesario trabajar con al menos 4 cifras significativas en los resultados, esto ofrece una precisión de una diezmilésima.

$$0.5572^2 + 0.7428^2 + 0.3714^2 = 1.00016164$$

3.2.2. La cuerda AB es empleada para sostener la verticalidad del poste que soporta las cuerdas de la red eléctrica; tal como se muestra en la Figura 7. Exprese el vector fuerza en forma vectorial y determine sus ángulos directores si la magnitud de la fuerza es de 680 N.

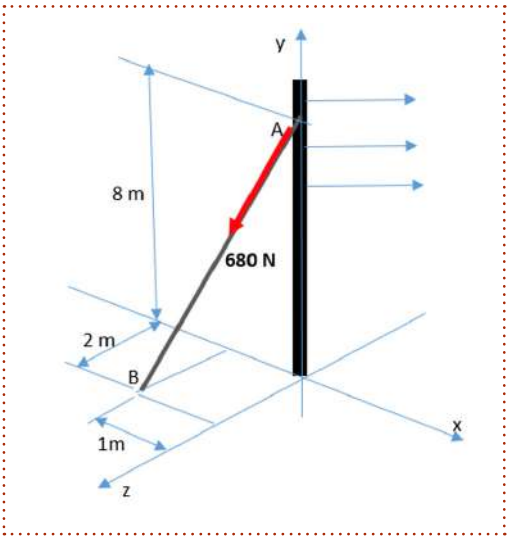


Figura 7. Ejercicio 3.2.2.

Fuente: Elaboración propia

A fin de dar solución, se debe expresar la fuerza de tensión de la cuerda en forma vectorial, siendo necesario expresar el vector en términos de la magnitud y su vector unitario. Éste se calcula dividiendo el vector posición (recorrido desde A hasta B) en su magnitud.

$$\mu_{ab} = \frac{\overrightarrow{r_{ab}}}{|r_{ab}|}$$

Determinamos el recorrido desde A hasta B:

$$\overrightarrow{r_{ab}} = -1i - 8j + 2k$$

- Vector unitario AB:

$$\mu_{ab} = \frac{\overrightarrow{r_{ab}}}{|r_{ab}|} = \frac{-1i-8j+2k}{\sqrt{1^2+8^2+2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{69}}\,i - \frac{8}{\sqrt{69}}\,j + \frac{2}{\sqrt{69}}\,k$$

Para expresar la tensión a través de los componentes del vector, se multiplica la magnitud de la fuerza por el vector unitario:

$$T_{ab} = |T_{ab}| * \mu_{ab} = 680 * \frac{-1i-8j+2k}{\sqrt{1^2+8^2+2^2}} = -81.86i - 654.90j + 163.73\,k$$

Con el fin de determinar los ángulos directores, se despeja la fórmula de la siguiente manera:

$$Cos\ \theta i = \frac{Vi}{V}$$

Donde:

$$\theta x = Cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{69}}\right) = 96.\ 91^{o}$$

$$\theta y = Cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{69}}\right) = 164.38^{o}$$

$$\theta z = Cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{69}}\right) = 76.07^{o}$$

3.2.3. Para sostener una compuerta se emplea a una barra de madera tal como se muestra en la Figura 8. Si la fuerza generada por el peso de la compuerta sobre la barra es de 1200 Newton; exprese la fuerza aplicada en B como un vector cartesiano y su magnitud en forma escalar.

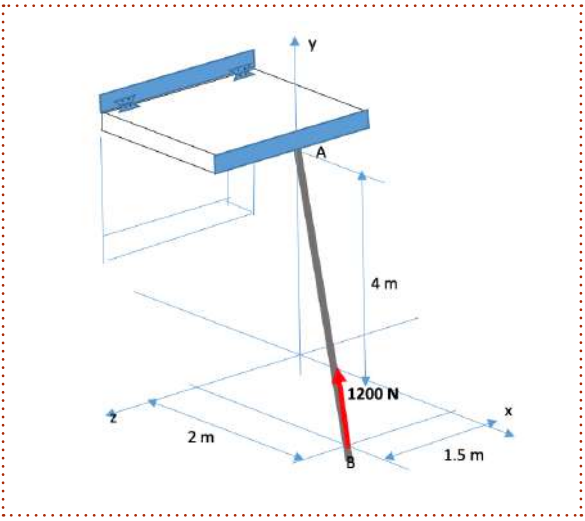


Figura 8. Ejercicio 3.2.3.

Fuente: Elaboración propia

Para expresar la fuerza mediante sus componentes rectangulares, es necesario determinar el vector unitario μ_{ba}

$$\mu_{ba} = \frac{\overrightarrow{r_{ba}}}{|r_{ba}|}$$

Determinamos el recorrido desde B hasta A:

$$\overrightarrow{r_{ba}} = -2i+4j-1.5k$$

- Vector unitario AB:

$$\mu_{ba} = \frac{\overrightarrow{r_{ba}}}{|r_{ba}|} = \frac{-2i+4j-1.5k}{\sqrt{2^2+4^2+1.5^2}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{89}}{2}}\,i + \frac{4}{\frac{\sqrt{89}}{2}}\,j - \frac{1.5}{\frac{\sqrt{89}}{2}}\,k$$

Si se racionaliza la expresión, el vector unitario se expresa así:

$$\mu_{ba} = -\frac{4\sqrt{89}}{89}\,i + \frac{8\sqrt{89}}{89}\,j - \frac{3\sqrt{89}}{89}\,k$$

Expresando la fuerza a través de los componentes del vector unitario:

$$F_{ba} = |F_{ba}| * \mu_{ba} = 1200 * \left(-\frac{4\sqrt{89}}{89}\,i + \frac{8\sqrt{89}}{89}\,j - \frac{3\sqrt{89}}{89}\,k\right)$$

$$F_{ba} = -508.80i + 1017.60j + 381.60k$$

Para determinar la expresión en forma escalar, se determina la magnitud y los ángulos directores.

$$|F_{ba}| = \sqrt{508.80^2 + 1017.60^2 + 381.60^2}$$

$$|F_{ba}| = 1200.0024\ N$$

Si se compara el resultado con el valor inicial, la aproximación es de 24 milésimas.

Para determinar los ángulos directores se empleará la fórmula de ángulos directores:

$$Cos\ \theta i = \frac{Vi}{V}$$

Donde:

$$\theta x = Cos^{-1}\left(\frac{-508.80}{1200}\right) = 115.09^{o}$$

$$\theta y = Cos^{-1}\left(\frac{1017.60}{1200}\right) = 32.01^{o}$$

$$\theta z = Cos^{-1}\left(\frac{-381.60}{1200}\right) = 108.54^{o}$$

3.3. Operaciones con vectores

Con el fin de realizar operaciones entre vectores, es necesario expresarlos mediante sus componentes rectangulares. A continuación, se realizará un ejemplo en dos dimensiones de suma, diferencia, producto punto y producto cruz entre dos vectores; éstos están acompañados de la representación gráfica para comprender las operaciones realizadas. Por ejemplo, sean los vectores A = (3, 4) y B = (-2, 3), su representación gráfica es la siguiente, ver Figura 9:

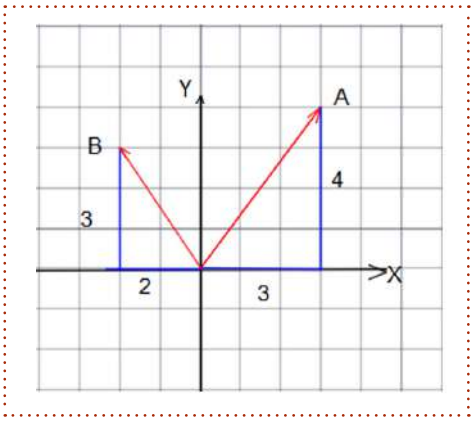


Figura 9. Componentes rectangulares del vector en R2

Fuente: Elaboración propia

Para sumar los vectores se deben sumar sus componentes.

$$\vec{A} = 3i+4j$$
$$\vec{B} = -2i+3j$$
$$\vec{V}_R = 1i+7j$$

La suma también puede resolverse gráficamente, colocando como origen del vector B el punto final del vector A, tal como se observa en la Figura 10:

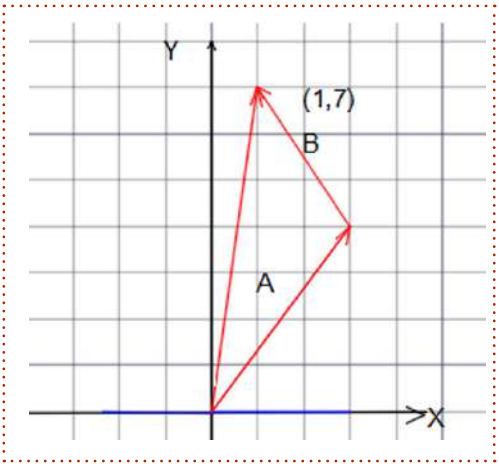


Figura 10. Suma de vectores en R2, método gráfico.

Fuente: Elaboración propia

La diferencia entre dos vectores se obtiene sumando al primer vector en vector inverso del segundo, A- B = A + (-B), ver Figura 11.

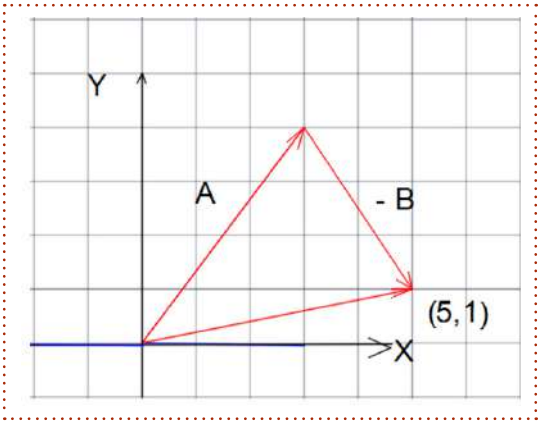


Figura 11. Diferencia en vectores en R2, método gráfico

Fuente: Elaboración propia

Solución:

$$\vec{A} = 3i+4j$$
$$\vec{B} = -2i-3j$$
$$\vec{V}_R = 5i+1j$$

Ejercicios de práctica:

3.3.1. Dados los vectores A y B, determine los componentes de cada vector y luego sume los vectores a través de sus componentes para hallar el vector resultante. Exprese el resultado en forma escalar.

$$A = 15\ m\ a\ 25^o$$
$$B = 20\ m\ a\ 65^o$$

Se expresa cada vector a través de sus componentes rectangulares:

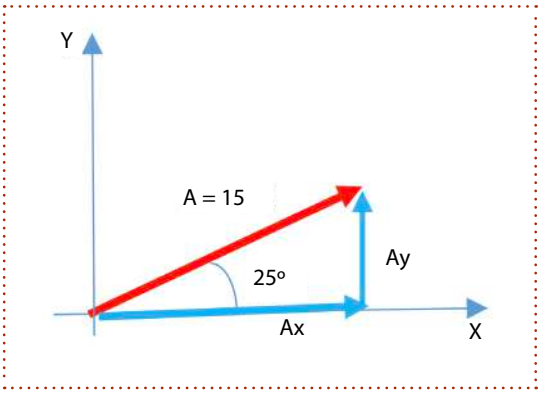


Figura 12. Representación del vector A

Fuente: Elaboración propia

$$A_x = 15\ m * cos(25^o) = 13.59\ m$$
$$A_y = 15\ m * sen(25^o) = 6.34\ m$$

Expresando el resultado como vector:

$$\vec{A} = 13.59\ i + 6.34\ j\ (m)$$

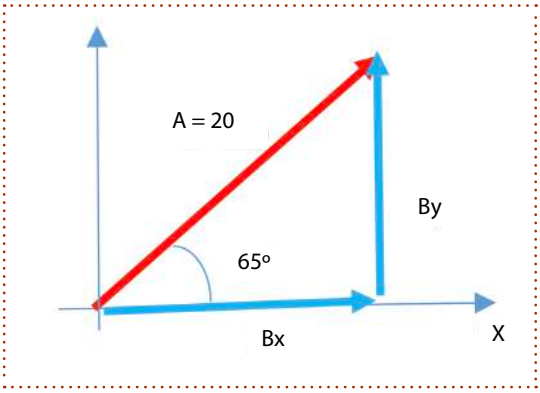


Figura 13. Representación del vector B

Fuente: Elaboración propia

$$B_x = 20\ m * cos(65^o) = 8.45\ m$$
$$B_y = 20\ m * sen(65^o) = 18.13\ m$$

Expresando el resultado como vector:

$$\vec{B} = 8.45\ i + 18.13\ j\ (m)$$

Para la suma de los vectores se podría emplear el método gráfico como se muestra en la Figura 14 o realizarlo a través de la suma de sus componentes rectangulares.

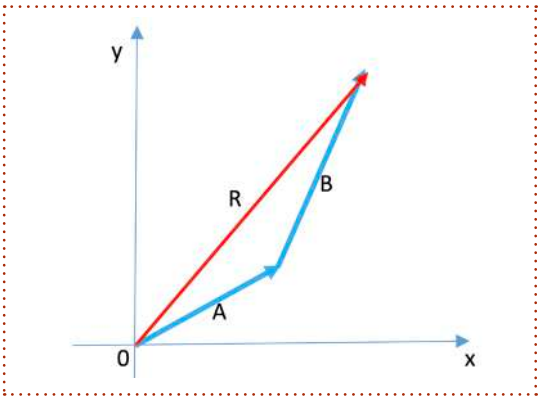


Figura 14. Representación de la suma de A + B

Fuente: Elaboración propia

Sumando las componentes de los vectores $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$

$$\vec{A} = 13.59i + 6.34j\ (m)$$
$$\vec{B} = 8.45i + 18.13j\ (m)$$
$$\vec{R} = 22.04i + 24.47j\ (m)$$

Y, por último, para expresar la resultante en forma escalar, se hallará la magnitud del vector resultante y el ángulo que forma con el eje x.

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$R = \sqrt{22.04^2 + 24.47^2} = 32.93\ m$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{Ry}{Rx}\right) = tan^{-1}\left(\frac{24.47}{22.04}\right) = 51.26°$$

Luego, el resultado expresado en forma escalar es:

$$R = 32.93\ m\ a\ 51.26^o$$

3.3.2. Dados los vectores A y B, determine los componentes de cada vector y luego sume los vectores a través de sus componentes y exprese el resultado en forma escalar

$$A = 35\ in\ a\ 5^o$$
$$B = 12\ \ in\ a\ 125^o$$

Expresamos cada vector a través de sus componentes rectangulares:

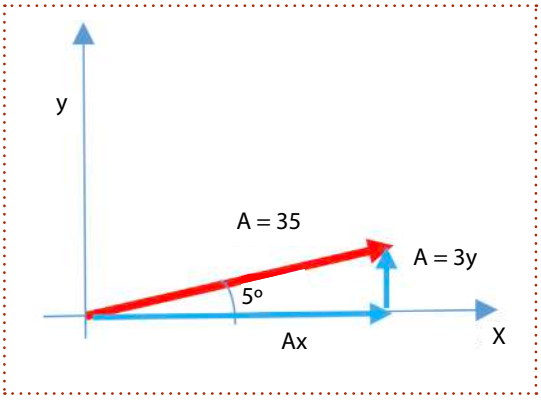


Figura 15. Representación del vector A

Fuente: Elaboración propia

$$A_x = 35\ in * cos(5^o) = 34.87\ in$$
$$A_y = 35\ m * sen(5^o) = 3.05\ in$$

Expresando el resultado como vector:

$$\vec{A} = 34.87\ i + 3.05\ j\ (m)$$

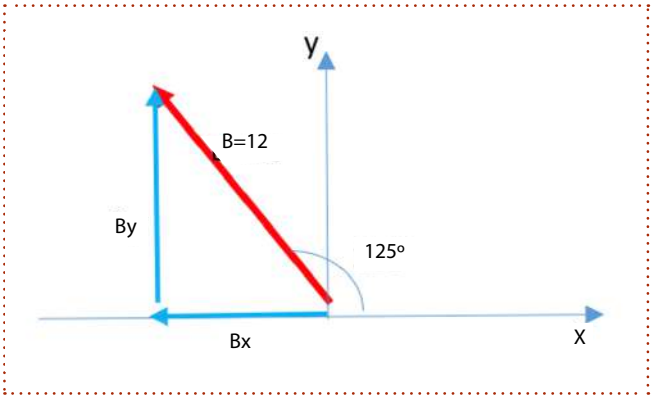


Figura 16. Representación del vector B

Fuente: Elaboración propia

$$B_x = 12\ in * cos(125^o) = -6.88\ in$$

$$B_y = 12\ in * sen(125^o) = 9.83\ in$$

Expresando el resultado como vector:

$$\vec{B} = -6.88\ i + 9.83\ j\ (in)$$

Para la suma de los vectores se realiza a través de la suma de sus componentes rectangulares. Al sumar las componentes de los vectores $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$

$$\vec{A} = 34.87\ i + 3.05\ j\ (in)$$

$$\vec{B} = -6.88\ i + 9.83\ j\ (in)$$

$$\vec{R} = 27.99\ i + 12.88\ j\ (in)$$

Y, por último, para expresar la resultante en forma escalar, se calcula la magnitud del vector resultante y el ángulo que forma con el eje x.

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$R = \sqrt{22.99^2 + 12.88^2} = 30.81\ m$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{Ry}{Rx}\right) = tan^{-1}\left(\frac{12.88}{27.99}\right) = 24.71°$$

Luego el resultado expresado en forma escalar es:

$$R = 30.81\ in\ a\ 24.71^o$$

3.3.4. Una brida es empleada para soportar dos fuerzas, tal como se muestra en la Figura 17, donde $\beta = 45^o$. Determine la fuerza resultante, su expresión vectorial y escalar.

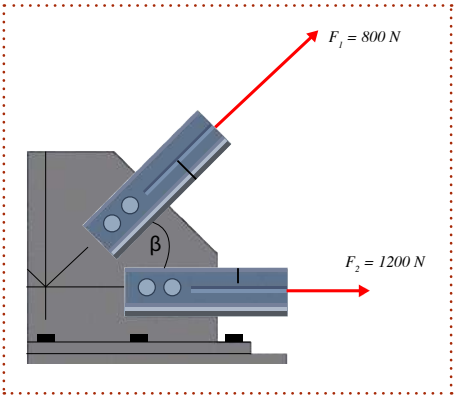


Figura 17. Ejercicio 3.3.4.

Fuente: Elaboración propia

Para sumar los vectores es necesario descomponerlos en sus componentes rectangulares:

$$\overrightarrow{F1} = 800 * cos(45)i + 800 * sin(45)\ j$$

$$\overrightarrow{F1} = 565.69\ i + 565.69\ j$$

$$c = 1200\ i$$

Se suman las componentes: donde $\vec{R} = \vec{F1} + \vec{F2}$

$$\vec{R} = (565.69 + 1200)i + 565.69\,j$$

$$\vec{R} = 1765.69i + 565.69\,j \quad \textit{Forma Vectorial}$$

Para expresarlo en forma escalar, se calcula la magnitud y el ángulo:

$$R = \sqrt{1765.69^2 + 565.69^2}$$

$$R = 1864.10\ N$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{565.69}{1765.69}\right) = 17.76°$$

En forma escalar $R = 1864.10\ N$ *con un ángulo de* $17.76°$ con respecto al eje x positivo.

3.3.5. Determine la suma de los vectores A, B y C, exprese el resultado en forma vectorial.

$$A = (-4,1,3);\ \ B = (5,8,-7)\ \ y\ \ C = (7,-5,6)$$

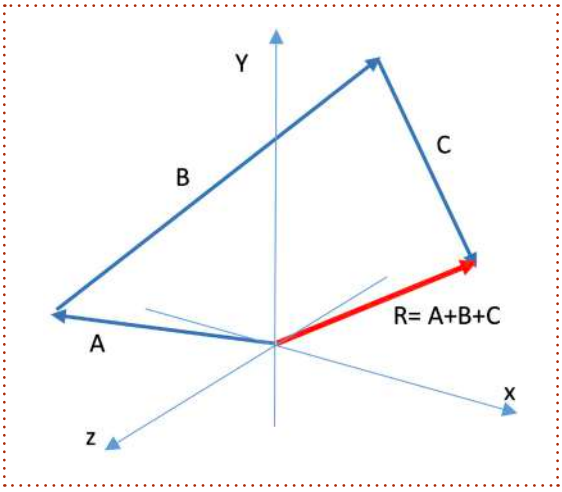


Figura 18. Representación gráfica de la suma de los vectores en R3

Fuente: Elaboración propia

Expresando los vectores en forma vectorial:

$$\vec{A} = -4\,i + 1\,j + 3\,k$$

$$\vec{B} = 5\,i + 8\,j - 7\,k$$

$$\vec{C} = 7\,i - 5\,j + 6\,k$$

Al sumar las componentes en i, j y k, se obtiene el vector resultante:

$$R = (-4+5+7)i + (1+8-5)j + (3-7+6)k$$

$$\boldsymbol{R = 8\,j + 4\,j + 2\,k}$$

Para expresar el vector resultante en forma escalar, se calcula la magnitud y sus ángulos directores:

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

$$R = \sqrt{8^2 + 4^2 + 2^2} = 9.17$$

$$x = cos^{-1}\left(\frac{Ry}{R}\right) = cos^{-1}\left(\frac{8}{9.17}\right) = 29.26°$$

$$y = cos^{-1}\left(\frac{Ry}{R}\right) = cos^{-1}\left(\frac{4}{9.17}\right) = 64.14°$$

$$z = cos^{-1}\left(\frac{Rz}{R}\right) = cos^{-1}\left(\frac{2}{9.17}\right) = 77.40°$$

3.4. Producto escalar

El producto escalar entre dos vectores se representa de la siguiente forma:

$$A.B = AB\ cos$$

Luego, si se realiza la operación entre componentes diferentes, teniendo en cuenta que el ángulo entre componentes es 90 grados, lo cual: $Cos\ 90 = 0$, se anula el producto. Sólo toma valores cuando es una misma componente, debido a que el $Cos\ 0 = 1$.

$$i.j = i * j * \cos 90 = 0$$
$$i.k = j * k * \cos 90 = 0$$
$$k.i = k * i * \cos 90 = 0$$

Solución:

$$A.B = i * i + j * j + k * k$$
$$A.B = (3i + 4j) \,.\, (-2i + 3j)$$
$$A.B = 3 * -2 + 4 * 3 = 6$$

Una de las aplicaciones más útiles del producto escalar, consiste en lograr descomponer un vector sobre un eje arbitrario. El procedimiento consiste en calcular el ángulo formado entre el eje y el vector y, a partir de este valor, emplear funciones trigonométricas (seno y coseno) para expresarlo en términos de la componente perpendicular y la componente paralela.

3.4.1. Sea el vector $A=(2,5)$ y $B=(4,3)$ en R2. Determine las componentes del vector A, respecto al vector B.

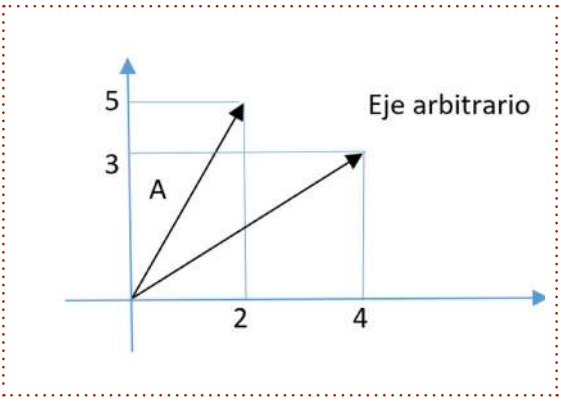


Figura 19. Ejercicio 3.4.1.

Fuente: Elaboración propia

A partir de la fórmula de producto escalar, se calcula el ángulo entre el vector A y el B:

$$A.B = AB\cos$$

$$\cos = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A*B}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A*B}\right)$$

El vector $\vec{A} = 2i + 5j$, y su magnitud es $A = \sqrt{2^2 + 5^2} = 2\sqrt{6}$

El vector $\vec{B} = 4i + 3j$, y su magnitud es $B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2i + 5j).(4i + 3j) = 2*4 + 5*3 = 23$$

Remplazando los valores en la fórmula:

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A*B}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{23}{2\sqrt{6}*5}\right) = 20.12^{o}$$

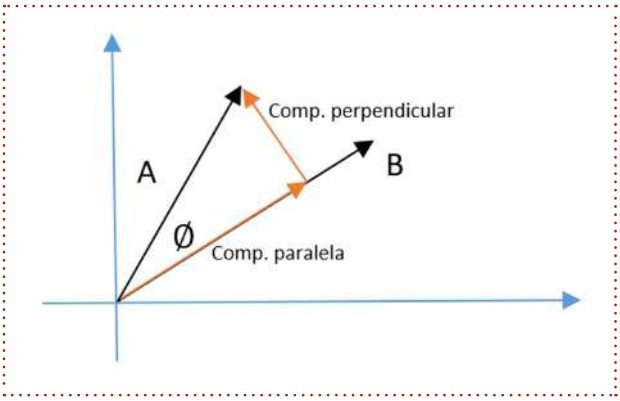


Figura 20. Descomposición del vector A sobre el vector B

Fuente: Elaboración propia

Para determinar las componentes paralela y perpendicular, se emplea el coseno y seno respectivamente así:

Componente Perpendicular $C_{per}^{*} = A * \sin(\ ) = * 2\sqrt{6} * \sin(20.12) = 1.6852$

Componente Paralelar $C_{per} = A \cos(\ ) = 2\sqrt{6} \cos(20.12) = 4.600$

3.5. Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz entre dos vectores representa un vector perpendicular al plano formado por los vectores y se representa de la siguiente forma:

$$A\ x\ B = A * B * Sen$$

Luego, si se realiza la operación entre componentes iguales, teniendo en cuenta que el ángulo entre componentes es 0, lo cual sin 0 = 0, se anula el producto. Sólo toma valores cuando es diferente componente, debido a que el Sin 90 = 1.

$$i.i = i * j * sin\ 0 = 0$$
$$j.j = j * k * sin\ 0 = 0$$
$$k.k = k * i * sin\ 0 = 0$$

Para realizar el producto, se tiene en cuenta la Regla de La Mano Derecha, Figura 21. Por otra parte, para definir el signo de la operación, se atiende el siguiente sistema.

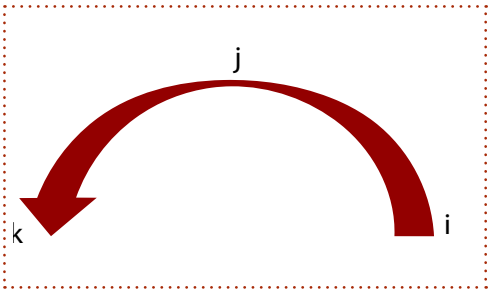


Figura 21. Regla de la Mano Derecha

Fuente: Elaboración propia

$$i\ X j\ = k$$
$$j\ X k = i$$
$$k\ X I = j$$
$$i\ X k = -j$$
$$k\ X j = -I$$

3.5.1. Dados los vectores $A = 3i+4j$ y $B = -2i+3j$, determine AXB

$$AXB = (3i + 4j)\ X\ (-2i + 3j)$$
$$AXB = (3*3)\ K + (4*-2)(-k) = 17k$$

También se puede realizar empleando matrices de la siguiente forma:

$$AXB = \begin{vmatrix} i & j & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$AXB = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} i \quad - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} j \quad + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} k$$

Solución:

$$AxB = 0i + 0j + 17k$$

Nota. Cuando los vectores están en R2, es posible realizar el ejercicio en forma directa, teniendo en cuenta que el vector resultante en perpendicular al plano donde se encuentran los vectores, es decir en el eje Z (k).

En ingeniería, una de las aplicaciones del producto vectorial se emplea para determinar el momento producido por una fuerza con respecto a un punto o un eje, lo cual permite generar ecuaciones para resolver sistemas de fuerzas.

3.5.2. La cuerda AB es empleada para sostener la verticalidad del poste que soporta las cuerdas de la red eléctrica, tal como se muestra en la Figura 22. Determine el momento producido por la fuerza de la cuerda AB con respecto al punto P.

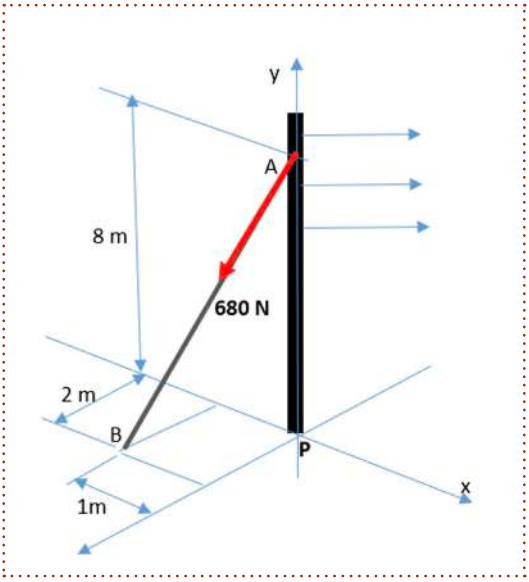


Figura 22. Ejercicio 3.5.2

Fuente: Elaboración propia

Para expresar la fuerza de tensión de la cuerda AB, se empleará la información del ejercicio 3.2.2.

$$T_{ab} = |T_{ab}| * \mu_{ab} = 680 * \frac{-1i - 8j + 2k}{\sqrt{1^2 + 8^2 + 2^2}}$$

$$T_{ab} = -81.86i - 654.90j + 163.73\,k$$

Para determinar el momento (M), se debe expresar la fuerza y el vector posición (recorrido desde el punto P hasta el punto de aplicación de la fuerza en A) en forma vectorial y el vector posición (recorrido desde el punto P hasta el punto de aplicación de la fuerza en A: r_{pa}).

$$M = r_{pa}\ X\ T_{ab} = (\,8j)\ X\ (\,-81.86i - 654.90j - 163.73\,k\,)$$

Que expresado matricialmente será:

$$r_{pa}XT_{ab} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ o & 8 & 0 \\ -81.86 & -654.9 & 163.73 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -654.9 & 163.73 \end{vmatrix} i \quad - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -81.86 & 163.73 \end{vmatrix} j \quad + \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -81.86 & -654.9 \end{vmatrix} k$$

Solución:

$$r_{pa}XT_{ab} = 1309.84i + 0j + 654.88k$$

3.6. Ejercicios de aplicación por resolver

3.6.1. Dados los vectores:

$$V_1 = (2,-4, 5)$$
$$V_2 = (6, 4, -3)$$
$$V_3 = (-4-1, 3)$$
$$V_4 = (4, 6, 2)$$

Realice las siguientes operaciones.

a. Exprese cada vector en forma escalar.

b. C alcule el vector unitario de cada uno de ellos.

c. Realice la suma de los vectores y muestre el resultado gráficamente.

d. Determine la suma:

i. $V_1 + 3\,V_2 - V_4$
ii. $V_3 - 2\,V_4 + V_1$
iii. $5V_1 + V_2 - 3V_3$

e. Calcule el ángulo comprendido entre los vectores:

vi. $V_1\, y\, V_2$
vii. $V_3\, y\, V_2$
viii. $V_4\, y\, V_1$

f. Calcule el producto vectorial y escalar entre los siguientes vectores:

vii. V_4 y V_2
viii. V_1 y V_2
ix. V_3 y V_1

3.6.2. Al aplicar las operaciones vectoriales es posible determinar áreas y volúmenes. A partir de estos conceptos determine:

a. El área formada por los puntos $A= (6,4,-5)$, $B= (-6,4,-8)$ y $C= (4,1, 9)$

b. Encuentre el volumen generado por los vectores $V_1 = (6,-2, 8)$, $V_2 = (8, 5, -6)$ y $V_3 = (-7,-6, 5)$.

4. Aplicación de vectores en sistemas coplanares en equilibrio

Son muchas las situaciones de la mecánica en la cual los sistemas se encuentran en equilibrio estático, para lo cual es necesario resolver sistemas de ecuaciones que se generan a partir de sistemas de fuerzas representados vectorialmente.

Un sistema muy empleado en ingeniería es el sistema de cuerdas, Figura 23. En el ejemplo se emplean dos cuerdas para soportar una masa de 20 Kg, formando un sistema en equilibrio. Para analizar este sistema es necesario construir un diagrama que represente las tensiones de las cuerdas como vectores (diagrama de cuerpo Libre).

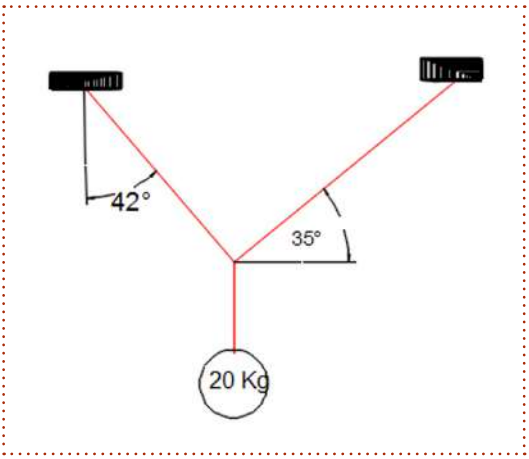


Figura 23. Sistema de cuerdas

Fuente: Elaboración propia

El sistema consta de tres fuerzas: W que representa la fuerza producida por la masa $(W = mg)$ y las fuerzas (tensiones) en las cuerdas T_{ab} y T_{ac}, tal como se muestra en la Figura 24. La expresión de cada vector es:

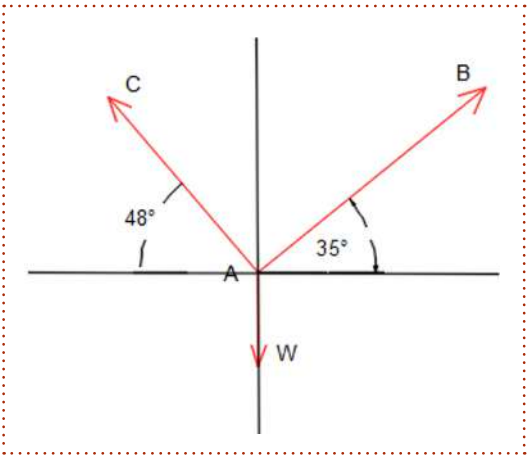


Figura 24. Diagrama de fuerzas

Fuente: Elaboración propia

Fuerzas expresadas como vectores:

$$\vec{w} = 0\ i - 196{,}2\ \ j\ (N)$$
$$\vec{T_{ab}} = T_{ab}\cos(35)i + T_{ab}\sin(35)\,j$$
$$\vec{T_{ac}} = -T_{ac}\sin(42)\ i + T_{ac}\ \cos(42)k$$

Para conocer el valor de la tensión en las cuerdas Ab y AC, y teniendo en cuenta su condición de equilibrio, se emplea la segunda ley de Newton, simplificada así:

$$\sum \vec{F} = ma = 0$$

Donde la aceleración es igual a cero, por encontrase el sistema en equilibrio.

$$\sum \vec{F} = \vec{T_{ab}} + \vec{T_{ac}} + \vec{w}$$
$$\sum \vec{F} = T_{ab}\cos(35)i + T_{ab}\sin(35) - T_{ac}\sin(42)i + T_{ac}\cos(42) + 0\ i - 196{,}2\ \ j = 0$$
$$\sum \vec{F}x = T_{ab}\cos(35) - T_{ac}\ \sin(42) = 0$$
$$\sum \vec{F}x = T_{ab}\sin(35) + T_{ac}\ \cos(42) - 196{,}2 = 0$$

Se obtienen dos ecuaciones lineales que se solucionan mediante el método de sustitución. Se despeja T_{ab} de la primera ecuación y se sustituye en la segunda:

$$T_{ab} \cos(35)i = T_{ac} \sin(42)$$

$$T_{ab} = \frac{\sin(42)}{\cos(35)} T_{ac}$$

$$\frac{\sin(42)}{\cos(35)} T_{ac} \sin(35) + T_{ac} \cos(42) = 196{,}2$$

$$T_{ac}\left(\frac{\sin(42)}{\cos(35)} \sin(35) + \cos(42)\right) = 196{,}2$$

$$T_{ac} = \left(\frac{196{,}2}{\frac{\sin(42)}{\cos(35)} \sin(35) + \cos(42)}\right)$$

Solución:

$$T_{ac} = 161.93\ N\ y\ \ T_{ab} = 132.27\ N$$

Este ejercicio también puede resolverse aplicando el teorema de seno, sumando los tres vectores en forma gráfica y determinando los ángulos formados en los vértices del triángulo Figura 25, de la siguiente forma:

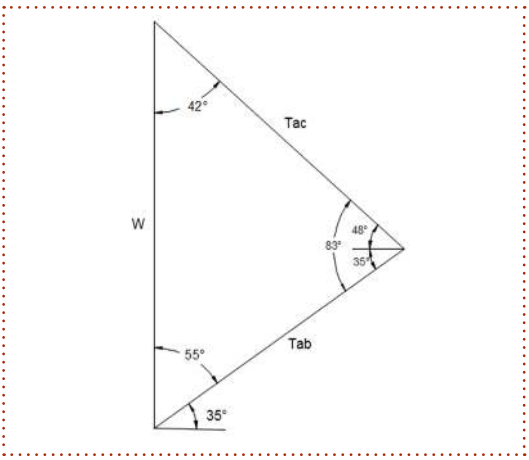


Figura 25. Represntación teorena del seno

Fuente: Elaboración propia

Teorema del seno: relacionando cada lado del triángulo con el seno del ángulo opuesto:

$$\frac{T_{ab}}{sin\ 42} = \frac{T_{ac}}{sin\ 55} = \frac{w}{sin\ 83}$$

Despejando se obtienen los valores de las tenciones:

$$T_{ac} = \frac{w}{sin\ 83}\ x\ Sin\ 55$$

$$T_{ac} = \frac{196.2}{sin\ 83}\ x\ Sin\ 55 = 161.93\ N$$

$$T_{ab} = \frac{w}{sin\ 83}\ x\ Sin\ 42$$

$$T_{ab} = \frac{196.2}{sin\ 83}\ x\ Sin\ 42 = 132.27\ N$$

Ahora, se plantea un ejercicio similar, pero en tres dimensiones, se trata de un sistema de cuerdas empleado para soportar una carga de 981 N, mediante las cuerdas AB, AC Y AD, como se muestra en la Figura 26.

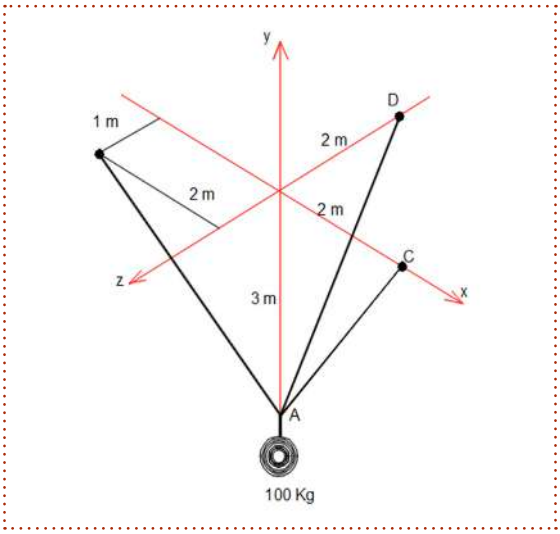


Figura 26. Representación sistema de fuerzas en R3

Fuente: Elaboración propia

Es importante representar el diagrama de fuerzas, Figura 27, debido a que permite identificar la forma y la orientación para abordar el recorrido y determinar los vectores unitarios. Los cuales se calculan aplicando la fórmula del vector posición dividido en su magnitud, así:

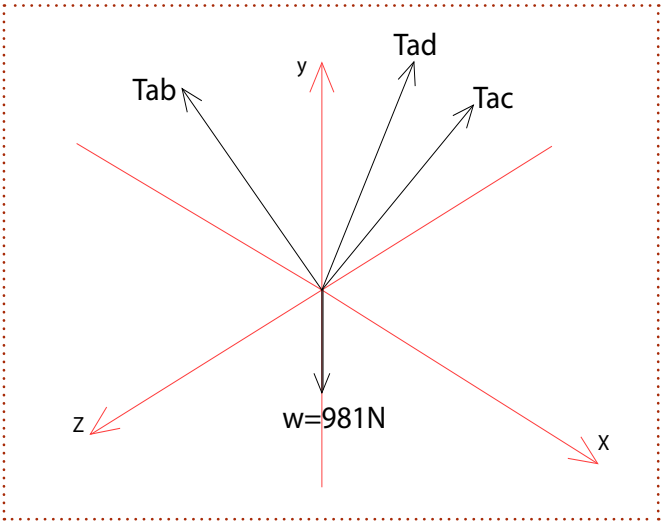


Figura 27. Diagrama de fuerzas

Fuente: Elaboración propia

Componentes unitarias de las tensiones:

- Recorrido desde A hasta B:

$$\overrightarrow{r_{ab}} = -2i+3j + 1k$$

- Vector unitario AB:

$$\mu_{ab} = \frac{\overrightarrow{r_{ab}}}{|r_{ab}|} = \frac{-2i + 3j + 1k}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}\, i + \frac{3}{\sqrt{14}}\, j + \frac{1}{\sqrt{14}}\, k$$

- Recorrido desde A hasta C:

$$\overrightarrow{r_{ac}} = 2i + 3j + 0k$$

- Vector unitario AC:

$$\mu_{ac} = \frac{\overrightarrow{r_{ac}}}{|r_{ac}|} = \frac{2i + 3j}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\, i + \frac{3}{\sqrt{13}}\, j$$

- Recorrido desde A hasta D:

$$\overrightarrow{r_{ad}} = 0i + 3j - 2k$$

- Vector unitario AD:

$$\mu_{ad} = \frac{\overrightarrow{r_{ad}}}{|r_{ad}|} = \frac{3j - 2k}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\, j - \frac{2}{\sqrt{13}}\, k$$

Ahora, se muestran las tenciones como vectores a través de sus componentes rectangulares:

- Para la tensión de la cuerda AB:

$$\overrightarrow{T_{ab}} = T_{ab} \cdot \mu_{ab} = T_{ab} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\, i + \frac{3}{\sqrt{14}}\, j + \frac{1}{\sqrt{14}}\, k \right)$$

$$\overrightarrow{T_{ab}} = .-\frac{2T_{ab}}{\sqrt{14}}\, i + \frac{3T_{ab}}{\sqrt{14}}\, j + \frac{1T_{ab}}{\sqrt{14}}\, k)$$

- Para la tensión de la cuerda AC:

$$\overrightarrow{T_{ac}} = T_{ac} \cdot \mu_{ab} = T_{ac} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\, i + \frac{3}{\sqrt{13}}\, j \right)$$

$$\overrightarrow{T_{ac}} = -\frac{2T_{ac}}{\sqrt{13}}\, i + \frac{3T_{ac}}{\sqrt{13}}\, j$$

- Para la tensión de la cuerda AD:

$$\vec{T}_{ad} = T_{ad} \cdot \mu_{ad} = T_{ad} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{13}} j - \frac{2}{\sqrt{13}} k \right)$$

$$\vec{T}_{ad} = \frac{3T_{ad}}{\sqrt{13}} j - \frac{2T_{ad}}{\sqrt{13}} k)$$

- Para la tensión generado por el peso:

$$\vec{w} = -981 \ j \ (N)$$

Para determinar los valores de las tensiones se aplica la segunda ley de Newton para sistemas en equilibrio. Se realiza la sumatoria de fuerzas en cada componente igualada a cero.

$$\sum \vec{F} x = - \frac{2T_{ab}}{\sqrt{14}} + \frac{2T_{ac}}{\sqrt{13}} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \vec{F} y = \frac{3T_{ab}}{\sqrt{14}} + \frac{3T_{ac}}{\sqrt{13}} + \frac{3T_{ad}}{\sqrt{13}} - 981 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \vec{F} z = \frac{1T_{ab}}{\sqrt{14}} - \frac{2T_{ad}}{\sqrt{13}} = 0 \qquad (3)$$

Despejando Tab de la ecuación 1:

$$T_{ab} \ \frac{\sqrt{14 \ tac}}{\sqrt{13}} \qquad (4)$$

Reemplazo la ecuación 4 en 2:

$$\frac{3}{\sqrt{14}} \ \frac{\sqrt{14T_{ac}}}{\sqrt{13}} + \frac{3T_{ac}}{\sqrt{13}} + \frac{3T_{ad}}{\sqrt{13}} - 981 = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}}T_{ac}+\frac{3T_{ac}}{\sqrt{13}}+\frac{3T_{ad}}{\sqrt{13}}-981=0$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}}T_{ac}+\frac{3T_{ad}}{\sqrt{13}}=981 \qquad (5)$$

Reemplazando 4 en 3

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\frac{\sqrt{14T_{ac}}}{\sqrt{13}}-\frac{2T_{ad}}{\sqrt{13}}=0$$

$$\frac{T_{ac.}}{\sqrt{13}}-\frac{2T_{ad}}{\sqrt{13}}=0 \qquad (6)$$

Al solucionar el sistema de 2 por 2 (ecuación 5 y 6), se simplifica igualando en coeficiente de T_{ad}, multiplicando la ecuación 5 por 2 y la ecuación 6 por 3, se obtiene:

$$\frac{12T_{ac}}{\sqrt{13}}+\frac{6T_{ad}}{\sqrt{13}}=1962$$

$$\frac{3T_{ac.}}{\sqrt{13}}-\frac{6T_{ad}}{\sqrt{13}}=0$$

$$\frac{15T_{ac}}{\sqrt{13}}=1962$$

Solución:

Despejando $T_{ac}=471.6\ N$: $T_{ab}=489.4N$; $T_{ad}=235.8$

4.1. Otros ejemplos de sistemas en equilibrio

4.1.1. A modo de ejemplo: un mástil y una cuerda que se emplean para soportar una carga, tal como se muestra en la Figura 28.

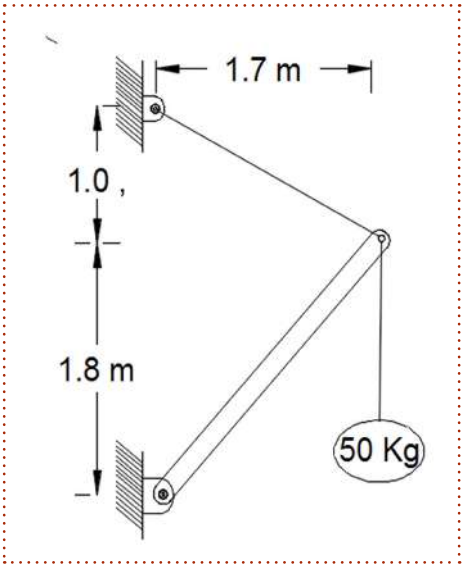


Figura 28. Ejercicio 4.1.1

Fuente: Elaboración propia

La Figura 28 muestra una barra articulada en un soporte sobre la pared. Esta barra sirve de apoyo a una cuerda que soporta un elemento de masa 50 Kg. Inicialmente, se debe realizar el diagrama de cuerpo libre que representa las 3 fuerzas que actúan en él y su geometría.

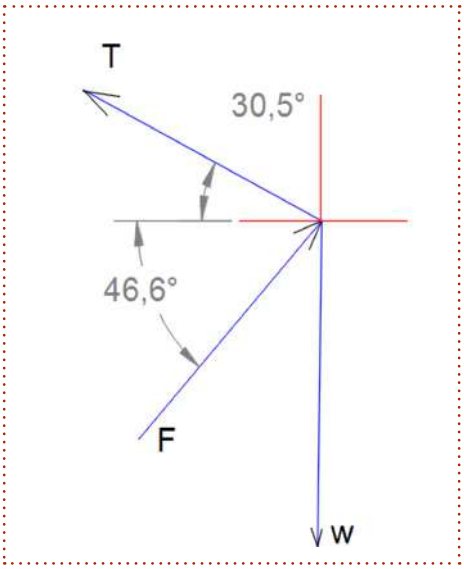


Figura 29. Diagrama de fuerzas ejercicio 4.1.1

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta que el peso W es equivalente a 50Kgx9,81m/s², lo cual equivale a 490,5 N y las direcciones de los vectores que representan a F y T, como se muestra en la Figura 29, luego se expresan los vectores a través de sus componentes rectangulares:

$$\vec{w} = 0\ i - 490{,}5\ \ j\ (N)$$
$$\vec{T} = -\ T\cos\ (30{,}5)i + T\sin\ (30{,}5)\ \ j$$
$$\vec{F} = F\ \cos(46{,}6)i + F\ \sin(46{,}6)k$$

Aplicando la ley de Newton:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Y realizando la sumatoria de componentes:

$$\sum\vec{F} = \vec{T} + \vec{F} + \vec{w}$$

$$\sum\vec{F} = -T\cos(30{,}5)i + T\sin(30{,}5)\ j + F\cos(46{,}6)i + F\sin(46{,}6)k - 490{,}5\ j = 0$$

$$\sum\vec{F}\ x = -T\cos(30{,}5) + F\cos(46{,}6) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum\vec{F}\ y = T\sin(30{,}5) + F\sin(46{,}6)k - 490{,}5\ j = 0 \qquad (2)$$

Se obtienen dos ecuaciones lineales que se solucionan mediante el método de sustitución. Se despeja T de la primera ecuación y se sustituye en la segunda:

$$T = \frac{\cos(46{,}6)}{\cos(30{,}5)} F$$

$$\frac{\cos(46{,}6)}{\cos(30{,}5)} F\sin(30{,}5) + F\sin(46{,}6)k = 490{,}5$$

$$F\left(\frac{\cos(46{,}6)}{\cos(30{,}5)}\sin(30{,}5) + \sin(46{,}6)\right) = 490{,}5$$

$$F = \left(\frac{490{,}5}{\frac{\cos(46{,}6)}{\cos(30{,}5)}\sin(30{,}5) + \sin(46{,}6)}\right)$$

Solución:

$$\boldsymbol{F = 880.56\ N\ y\ \ T = 702.18\ N}$$

Este mismo ejercicio se puede plantear como diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre la barra sólida, como se muestra en la Figura 30, de la siguiente forma:

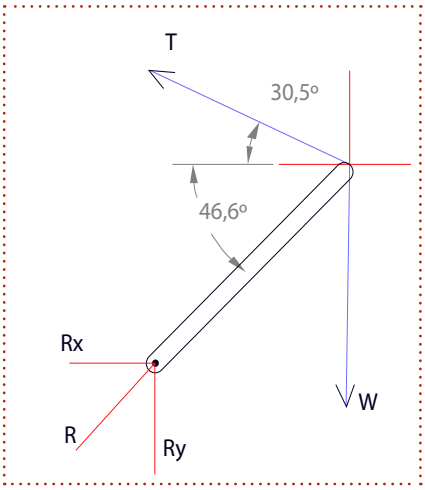


Figura 30. Representación de un sistema de fuerzas en un cuerpo rígido

Fuente: Elaboración propia

Al realizar el diagrama de cuerpo libre, se representa de igual forma el vector T, la tensión de la cuerda y el vector W, el peso. En este caso no representa la fuerza del elemento rígido, sino sus reacciones en el apoyo, en donde la reacción es igual a la fuerza y, para el proceso del cálculo, se grafica a través de sus componentes rectangulares, donde:

$$\vec{R} = Rx\ i + Ry\ j = R\cos(46{,}6) + R\sin(46{,}6)$$

Donde la magnitud debe ser $R = 880.56\ N$

4.1.2. En el sistema de cuerdas mostrado en el ejercicio anterior, se emplea una polea en A, sin fricción, que sostiene una masa de 200 kg. Calcule la tensión de las cuerdas y la masa de la esfera para que el sistema se encuentre en equilibrio estático. Tal como aparece en la Figura 31.

La tensión de la cuerda en A es equivalente a la masa por gravedad. Además, si se considera que no existe fricción en la polea, la cuerda AB tendría la misma tensión.

$$T_{ab} = 200\ Kg * 9.81\ \frac{m}{s^2} = 1962\ N$$

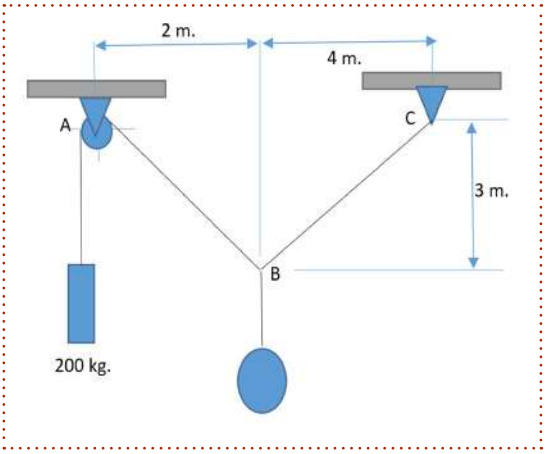


Figura 31. Ejercicio 4.1.2

Fuente: Elaboración propia

Ahora, se representa el sistema de fuerzas en B (sistema de fuerzas concurrente).

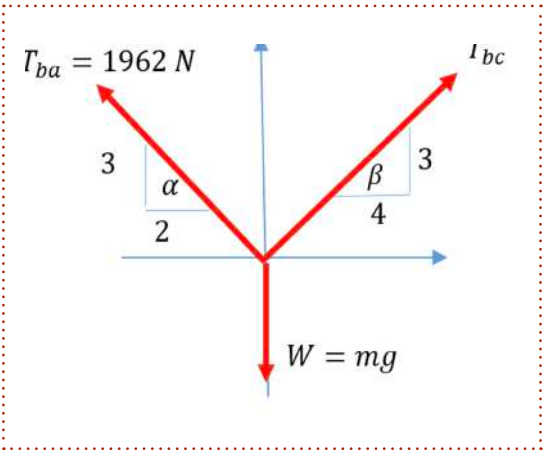


Figura 32. Diagrama de fuerzas ejercicio 4.1.2

Fuente: Elaboración propia

Aplicando la ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Y realizando la sumatoria de componentes:

$$\sum \vec{F} = \vec{T_{ba}} + \vec{T_{bc}} + \vec{w} = 0$$

$$\sum \vec{F} = -1962 * \cos(\alpha)i + 1962 * \sin(\alpha)\, j + T_{bc} \cos(\beta)i + T_{bc} * \sin(\beta)k - w\, j = 0$$

Se realiza la sumatoria en cada componente unitario.

$$\sum \vec{F}\, x = -1962 * \cos(\alpha) + T_{bc} \cos(\beta) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \vec{F}\, y = 1962 * \sin(\alpha) + T_{bc} * \sin(\beta)k - w = 0 \qquad (2)$$

Para determinar el valor de α y β, se calcula a través de la tangente:

$$\mathbf{Tan\ \theta = \frac{Vx}{Vy}}$$

Donde:

$$\alpha = Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^{o}$$

$$\beta = Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^{o}$$

Por otra parte, en el campo de la ingeniería es común emplear la pendiente para establecer el valor unitario de las componentes del vector:

$$Sen(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}}\ ;\ Cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$Sen(\beta) = \frac{3}{5}\ ;\ Cos(\beta) = \frac{3}{5}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) y (2):

$$-1962 * \frac{3}{\sqrt{13}} + T_{bc} * \frac{4}{5} = 0 \qquad (1)$$

$$T_{bc} = \left(1962 * \frac{2}{\sqrt{13}}\right) * \frac{5}{3}$$

$$\mathbf{T_{bc} = 1360.40\ N}$$

$$1962 * \frac{3}{\sqrt{13}} + T_{bc} * \frac{3}{5} - \mathrm{w} = 0 \qquad (2)$$

$$1962 * \frac{3}{\sqrt{13}} + 1360.40 * \frac{3}{5} = \mathrm{w}$$

$$w = 2448.72\ N$$

Solución:

La masa de la esfera es:

$$w = m * g \longrightarrow m = \frac{w}{g} = \frac{2448.72\ N}{9.81\ \frac{m}{s^2}} = \mathbf{249.62\ Kg}$$

4.1.3. Una barra de acero de 5 m, es empleada para mantener tensionada la cuerda que sostiene un parasol tal como se muestra en la Figura 33. Si la fuerza ejercida por la barra es de 1800 N, determine la tensión de las cuerdas.

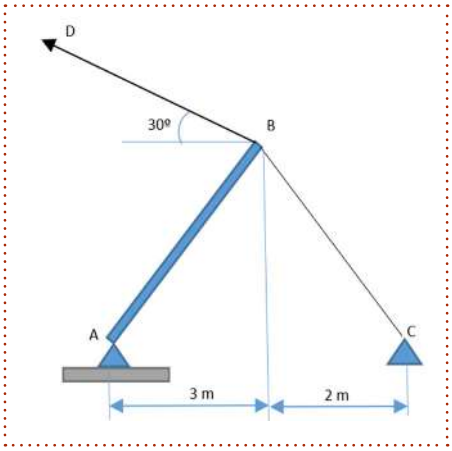


Figura 33. Representación ejercicio 4.1.3

Fuente: Elaboración propia

Para determinar el valor de α y θ, se calcula a través de la tangente:

$$Tan\ \theta = \frac{Vx}{Vy}$$

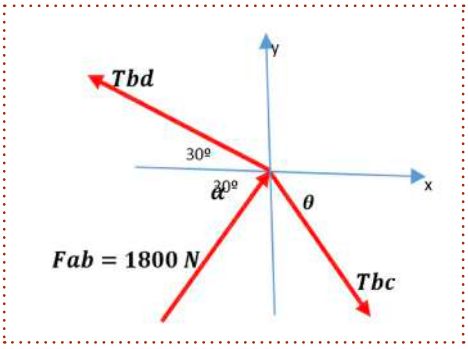


Figura 34. Diagrama de fuerzas ejercicio 4.1.3

Fuente: Elaboración propia

Donde:

$$\alpha = Tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^{o}$$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = 63.44^{o}$$

Se realiza la sumatoria en cada componente unitario

$$\sum\vec{F}\,x = 1800 * cos\,(53.13) + T_{bc} * cos(63.44) - Tbd * cos(30) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum\vec{F}\,y = 1800 * sin\,(53.13) - T_{bc} * sin(63.44) + Tbd * sin(30) = 0 \qquad (2)$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones de 2 por 2:

$$1080 + T_{bc} * cos(63.44) - Tbd * cos(30) = 0$$

$$T_{bc} * cos(63.44) - Tbd * cos(30) = -1080 \qquad (1)$$

$$1080 * sin\,(53.13) - T_{bc} * sin\,(63.44) + Tbd * sin(30) = 0$$

$$-T_{bc} * sin\,(63.44) + Tbd * sin(30) = -1440 \qquad (2)$$

Ahora se aplicará la simplificación de una de las variables multiplicando la ecuación (1) por $sin(30)$ y la ecuación (2) por $cos(30)$, y luego sumándolas para simplificar Tbd

$$T_{bc} * cos(63.44)\ \ sin(30) - Tbd * cos(30) * sin(30) = -1080 * sin(30)$$

$$-T_{bc} * sin(63.44) * cos(30) + Tbd * sin(30) * cos(30) = -1440 * cos(30)$$

$$T_{bc} * cos(63.44)\ \ sin(30) - T_{bc} * sin(63.44) * cos(30) = -1787.08$$

$$-Tbc\ (0.55) = -1787.08$$

$$\boldsymbol{Tbc = 3249.24\ N}$$

Ahora despejamos Tbd de la ecuación (1)

$$3249.24 * cos(63.44) - Tbd * cos(30) = -1080 \qquad (1)$$

$$-Tbd * cos(30) = -\ 3249.24\ cos(63.44) - 1080$$

$$Tbd = \frac{-2532.85}{-cos(30)}$$

$$\boldsymbol{Tbd = 2924.68N}$$

4.1.4. En un sistema de cuerdas, un hombre realiza una fuerza de 20 kN sobre la cuerda BAC empleando una cuerda y un aro en A, tal como se muestra en la Figura 34. Determine la tensión en la cuerda.

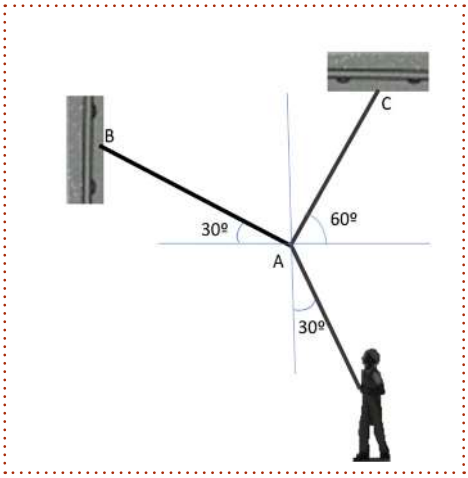


Figura 35. Ejercicio 4.1.4

Fuente: Elaboración propia

Al representar un esquema como suma de vectores, es posible emplear el teorema del seno para encontrar dicha tensión:

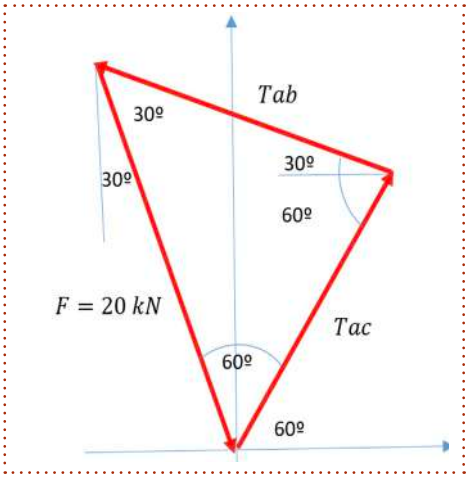


Figura 36. Suma de fuerzas ejercicio 4.1.4

Fuente: Elaboración propia

Para determinar los ángulos, se representan los vectores con los ángulos dados. Luego por ángulos alternos e internos se calculan los ángulos del triángulo formado. Recuerde que, si el sistema de fuerzas está en equilibrio estático, la suma de los vectores fuerzas deben dar cero.

Aplicando la ley del seno:

$$\frac{F}{Sin\ 90} = \frac{T_{ac}}{Sin\ 30} = \frac{T_{ab}}{Sin\ 60}$$

Despejando se obtienen los valores de las tenciones:

$$T_{ac} = \frac{F}{Sin\ 90}\ x\ Sin\ 30$$

$$T_{ac} = \frac{20}{Sin\ 90}\ x\ Sin\ 30 = 10\ N$$

$$T_{ab} = \frac{F}{Sin\ 90}\ x\ Sin\ 60$$

$$T_{ab} = \frac{20}{Sin\ 90}\ x\ Sin\ 60 = 17.32\ N$$

4.1.5. Un poste de concreto es empleado pasa sostener CA y CB, los cuales forman ángulos de 30^0 y 45^0 respectivamente. Determine la tensión en cada cable.

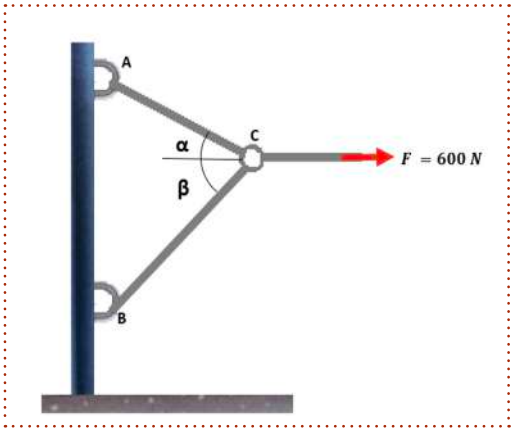


Figura 37. Ejercicio 4.1.5

Fuente: Elaboración propia

Se plantea el diagrama de fuerzas concurrentes en C:

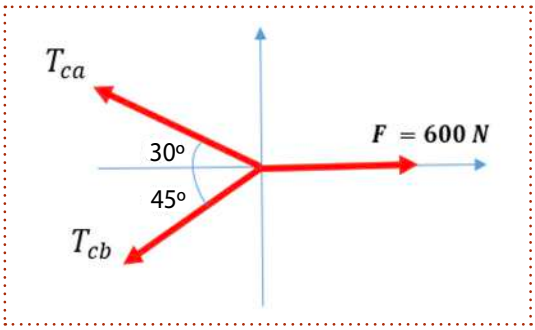


Figura 38. Diagrama de fuerzas ejercicio 3.1.5

Fuente: Elaboración propia

Se expresa cada fuerza mediante sus componentes rectangulares:

$$\vec{T}_{bc} = -T_{bc} * cos(45)i - T_{bc} * sin(45)\ j$$

$$\vec{T}_{ba} = -T_{ba} * cos(30)i + T_{ba} * sin(30)\ j$$

$$\vec{F} = 600\ i\ \ (N)$$

Se realiza la sumatoria en cada componente unitario:

$$\sum\vec{F}\ x = -T_{bc} * cos\ (45) - T_{ba} * cos(30) + 600 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum\vec{F}\ y = -T_{bc} * sin\ (45) + T_{ba} * sin(30) = 0 \qquad (2)$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones de 2 por 2:

$$-T_{bc} * cos\ (45) - T_{ba} * cos(30) + 600 = 0$$

$$T_{bc} * cos\ (45) + T_{ba} * cos(30) = 600 \qquad (1)$$

$$-T_{bc} * sin\ (45) + T_{ba} * sin(30) = 0 \qquad (2)$$

Para solucionar el sistema de ecuaciones, es posible despejar una variable en la ecuación (2) y sustituirla en la ecuación (1).

$$T_{bc} = \frac{T_{ba} * sin(30)}{sin(45)} \qquad (3)$$

$$\frac{T_{ba} * sin(30)}{sin(45)} * cos(45) + T_{ba} * cos(30) = 600$$

$$T_{ba} * sin(30) + T_{ba} * cos(30) = 600$$

$$T_{ba} = \frac{600}{sin(30) + cos\ (30)}$$

$$\boldsymbol{T_{ba} = 439.23\ N}$$

De la ecuación (3) se calcula el valor de T_{bc} :

$$T_{bc} = \frac{T_{ba} * sin(30)}{sin(45)} = \frac{439.23 * sin(30)}{sin(45)}$$

$$T_{bc} = 310.58\ N$$

Solución:

La tensión de las cuerdas es $T_{ba} = 439.23\ N$ y $T_{bc} = 310.58\ N$

4.1.6 Una cuerda es sostenida por tres elementos rígidos, tal como se muestra en la Figura 38. Determine la tensión en cada elemento si la fuerza a la cual se somete la cuerda es de 1400 KN en dirección x positivo.

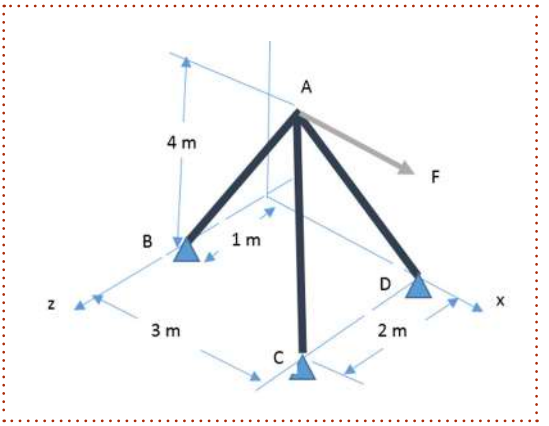


Figura 39. Representación ejercicio 4.1.6

Fuente: Elaboración propia

Para la tensión de la cuerda, se puede expresar mediante el vector:

$$\vec{F} = 1400\ i$$

Ahora, se debe expresar la fuerza ejercida por cada elemento estructural como un vector, a partir de 2 operaciones: expresar el vector unitario y luego expresar la fuerza a través de sus componentes vectoriales, teniendo en cuenta el sentido que se asume en la Figura 39.

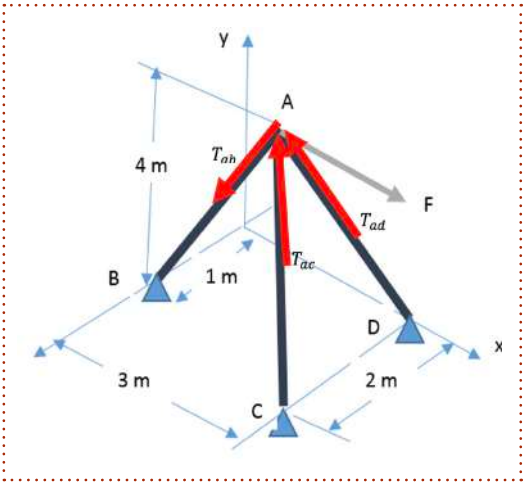


Figura 40. Representación del sistema de fuerzas

Fuente: Elaboración propia

Fuerza en el elemento AB

$$\mu_{ab} = \frac{\overrightarrow{r_{ab}}}{|r_{ab}|} = \frac{-1.5i - 4j + 0k}{\sqrt{1.5^2 + 4^2 + 0^2}}$$

$$\mu_{ab} = (-0.35i - 0.94j + 0\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ab}} = T_{ab}.\mu_{ab} = T_{ab}.(-0.35i - 0.94j + 0\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ab}} = -0.35T_{ab}\,i - 0.94T_{ab}\,j + 0T_{ab}\,k) \quad (KN)$$

Fuerza en el elemento AC

$$\mu_{ac} = \frac{\overrightarrow{r_{ac}}}{|r_{ac}|} = \frac{-1.5i + 4j - 1k}{\sqrt{1.5^2 + 4^2 + 1^2}}$$

$$\mu_{ac} = (-0.34i + 0.91j - 0.23\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ac}} = T_{ac}.\mu_{ac} = T_{ac}.(-0.34i + 0.91j + 0.23\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ac}} = -0.34T_{ac}\,i + 0.91T_{ac}\,j - 0.23T_{ac}\,k) \quad (KN)$$

Fuerza en el elemento AD

$$\mu_{ad} = \frac{\overrightarrow{r_{ad}}}{|r_{ad}|} = \frac{-1.5i + 4j + 1k}{\sqrt{1.5^2 + 4^2 + 1^2}}$$

$$\mu_{ac} = (-0.34i + 0.91j + 0.23\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ad}} = T_{ad}.\mu_{ad} = T_{ad}.(-0.34i + 0.91j + 0.23\,k)$$

$$\overrightarrow{T_{ad}} = -0.34T_{ad}\,i + 0.91T_{ad}j + 0.23T_{ad}\,k) \quad (KN)$$

Como el sistema se encuentra en equilibrio estático, es posible emplear las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum\vec{F} = \overrightarrow{T_{ac}} + \overrightarrow{T_{ad}} + \overrightarrow{T_{ab}} + \overrightarrow{F_c} = \vec{0}$$

$$\sum\vec{F} = -0.34\,T_{ac}\,i + 0.91T_{ac}j - 0.23T_{ac}\,k - 0.34T_{ad}\,i + 0.91T_{ad}j + 0.23T_{ad}\,k$$

$$-0.35T_{ab}\,i - 0.94T_{ab}j + 0T_{ab}\,k + 1400i = 0$$

Se realiza la sumatoria en cada uno de los componentes:

$$\sum\vec{F}\,x = -0.34\,T_{ac} - 0.34T_{ad} - 0.35T_{ab} + 1400 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum\vec{F}\,y = 0.91\,T_{ac} + 0.91T_{ad} - 0.94T_{ab} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum\vec{F}\,z = -0.23\,T_{ac} + 0.23T_{ad} = 0 \qquad (3)$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones, se obtiene:

- De la ecuación *(3)*: $T_{ac} = T_{ad}$
- Al sustituir T_{ac} *por* T_{ad} en la ecuación *(1) y (2)*, se obtiene

$$-0.34T_{ad} - 0.34T_{ad} - 0.35T_{ab} = -1400 \quad - \rightarrow \quad 0.68T_{ad} + 0.35T_{ab} = 1400$$

$$0.91Tad + 0.91Tad - 0.94Tab = 0 \quad - \rightarrow \quad 1.82T_{ad} - 0.94T_{ab} = 0$$

Al solucionar el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$1.82T_{ad} - 0.94T_{ab} = 0 \quad - \rightarrow T_{ad} = \frac{0.94}{1.82} T_{ab}$$

$$1.68\left(\frac{0.94}{1.82} T_{ab}\right) + 0.35\, T_{ab} = 1400$$

$$0.70\, T_{ab} = 1400$$

Solución:

$$T_{ab} = 2000\ KN$$

$$T_{ad} = \frac{0.94}{1.82} T_{ab} = 1032.97\ KN$$

$$T_{ac} = T_{ad} = 1032.97\ KN$$

4.1.7 El elemento rígido $ABCD$ soporta una fuerza $F = 30i - 20j\ (N)$, se encuentra articulado en A, y se suspende mediante una cuerda, tal como se muestra en la Figura 40. Determine la magnitud del momento generado en A debido a las fuerzas aplicadas sobre él, si $T = 40\ N$.

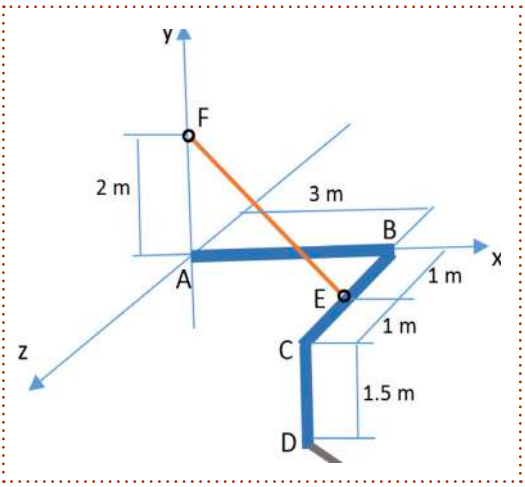


Figura 41. representación ejercicio 4.1.7

Fuente: Elaboración propia

Para calcular el momento generado en A, se debe calcular el momento generado por cada fuerza. Expresando vectorialmente las fuerzas a través de sus componentes rectangulares y el vector distancia, tal como se muestra en la Figura 41.

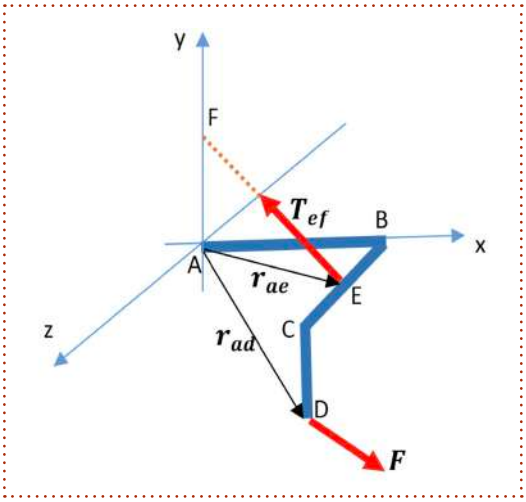


Figura 42. representación sistema de fuerzas ejercicio 4.1.7

Fuente: Elaboración propia

Para calcular el momento, se puede realizar de forma escalar y en forma vectorial

Forma escalar: $AxB = AB\ Sen$

Forma vectorial: $AxB = (Axi+Ayj+Azk)\ x\ (Bxi+Byj+Bzk)$

Expresamos las fuerzas y los vectores posición vectorialmente:

$$\mu_{ef} = \frac{\overrightarrow{r_{ef}}}{|r_{ef}|} = \frac{-3i + 2j - 1k}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\mu_{ef} = (-0.80i + 0.53j - 0.27\ k)$$

$$\overrightarrow{T_{ef}} = T_{ef} . \mu_{ef} = 40\ (-0.80i + 0.53j - 0.27\ k)$$

$$\overrightarrow{T_{ef}} = -32.07i + 21.38\ j - 10.69k$$

$$\vec{F} = 30i - 20j$$

$$r_{ae} = (3i+1\,k)$$

$$r_{ad} = (3i-1.5j+2\,k)$$

El momento en A (Ma) se calcula:

$$Ma = Mt+Mf = r_{ad}\,xF + r_{ac}\,xrT_{ef}$$

$$Mt = r_{ac}\,xrT_{ef}$$

$$Mt = (3i+1k)\ x\ (-32.07i + 21.38j - 10.69\,k)$$

$$Mt = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ -32.07 & 21.38 & -10.69 \end{vmatrix} = -21.38i + 0j + 64.14k$$

$$Mf = r_{ad}\,xF$$

$$Mf = (3i - 2j + 2k)\ x\ (30 - 20j)$$

$$Mf = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 30 & -20 & 0 \end{vmatrix} = 40i + 60j$$

Luego, el momento total en A es:

$$Ma = Mt+Mf$$

$$Ma = (-21.38i + 0j + 64.14k) + (40i + 60j)$$

$$Ma = 18.65i + 60j + 104.14k$$

Solución:

Su magnitud es:

$$Ma = \sqrt{(18.65^2 + 60^2 + 104.14^2)} = 121.63\ N.m$$

4.2 Ejercicios de aplicación propuestos

4.2.1. Se desea suspender un elemento de 250 kilos de masa de una placa de 20 m2. Teniendo en cuenta que debe quedar sobre el centro de la placa y las tres cuerdas deben soportar igual tensión. Determine la distribución y tensión de las cuerdas y la cantidad requerida para su montaje.

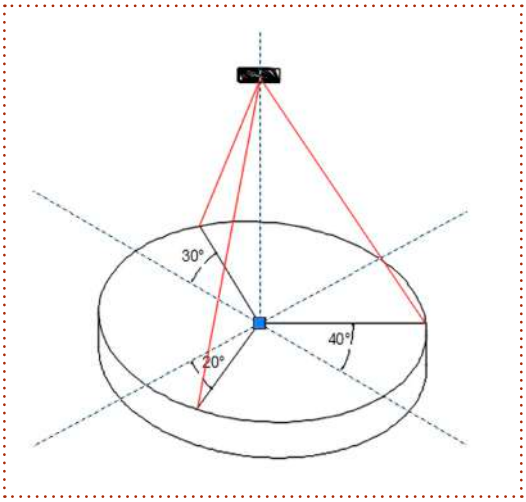


Figura 43. representación ejercicio 4.2.2

Fuente: Elaboración propia

4.2.2. Una placa circular está suspendida por tres cuerdas, tal como se muestra en la Figura 42, si el diámetro de la placa es de 2 m y su masa es de 2500 Kg, determine la tensión de las cuerdas.

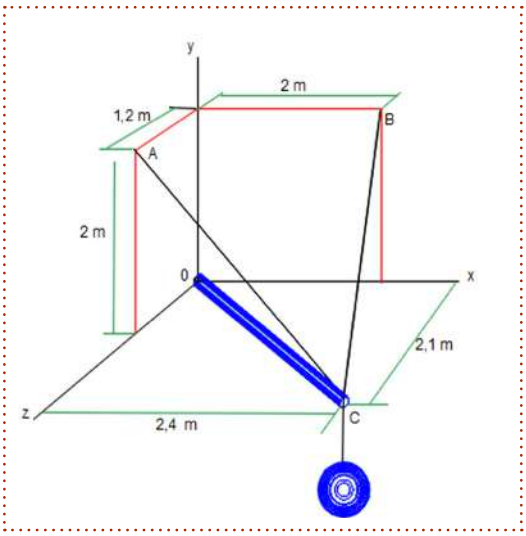


Figura 44. representación ejercicio 4.2.3

Fuente: Elaboración propia

4.2.3. La barra OC se encuentra sobre el plano xz, apoyado en O ejerce una fuerza de empuje de 234 N, tal como se muestra en la Figura 43. Determine la masa de la esfera y la tensión de las cuerdas CA y CB.

4.2.4. Para el sistema de fuerzas en equilibrio de la figura 43. Determine la variación de la masa si la fuerza de tensión de la cuerda AC es de 430 N.

4.2.5. Una cuerda de acero es empleada para colgar un semáforo de 40 Kg. Si la distancia entre los postes es de 6 m, el semáforo está ubicado a 2,6 m de uno de los postes y la máxima flexión que muestra la cuerda es de 48 cm. Determine la tensión de las cuerdas.

4.2.6. Una cuerda que puede soportar como máximo 2400 KN es empleada para sostener cajas de gran tamaño, ver Figura 44. Si las pendientes de la cuerda son de 4:3 y de 4:1, ¿Cuál sería el máximo peso w que podría resistir?

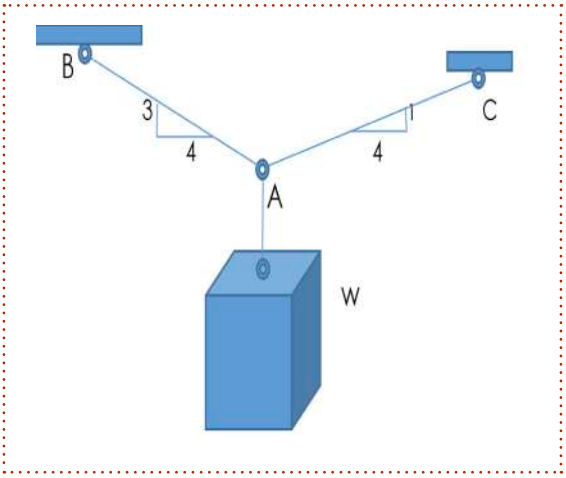


Figura 45. representación ejercicio 4.2.6

Fuente: Elaboración propia

4.2.7. Para la Figura 44, del ejercicio 4.2.6, ¿Cuál es la tensión en cada cuerda si la masa suspendida en A es de 400 Kg?

Ejercicio reto:

Pruebe sus habilidades de cálculo realizando el siguiente ejercicio sin usar calculadora.

Tres cuerdas son empleadas para sostener un bloque de 2000 N, determine la tensión generada en cada una de las cuerdas para la distribución mostrada en la Figura 45.

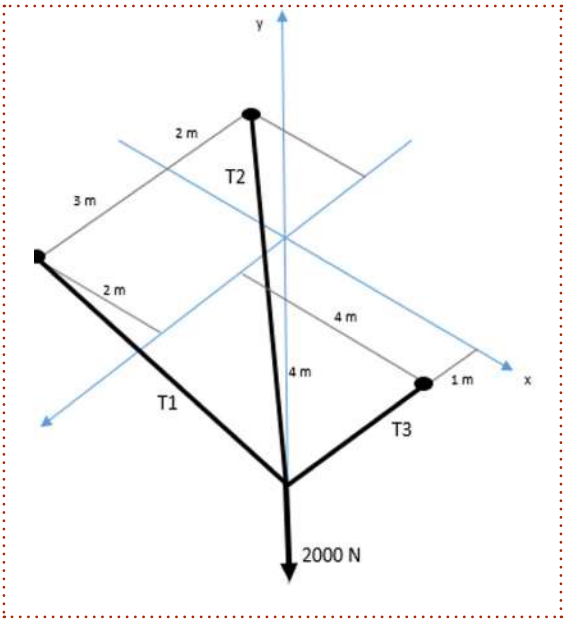


Figura 46. Representación ejercicio reto.

Fuente: Elaboración propia

Verifique sus respuestas:

$$T1 = 100\sqrt{29N}$$

$$T2 = \frac{700}{3}\sqrt{24N}$$

$$T3 = \frac{500}{3}\sqrt{33N}$$

5. Referencias

Tippens, Paul E. (2011). Física, conceptos y aplicaciones. (7ª edición). Mc Graw Hill. México.

Young, H y Freedman, R (2009). Física universitaria (12ª edición). PEARSON

Bibliografía complementaria

Beer, F., & Johnston, R. (2009). Mecánica vectorial para ingenieros Estática (6ª edición). Mc Graw Hill.

Beer, F., Johnston, R., & Mazurek, D. (2013). Mecánica vectorial para ingenieros Estática (Décima Edición). Mc Graw Hill.

Irving, S. (1999). Mecánica para Ingenieros. (1ª edición). Prentice Hall

Bedford, A (2000). Estática Mecánica Para Ingeniería. (2ª edición). Pearson Education

Hibbeler, R. (2016). Ingeniería Mecánica Estática. (14ª edición). Mc Graw Hill

Pytel, A. kiusalaas, J.(2012). Ingeniería Mecánica Estática. (3ª edición). CONGAGE LEARNING

Narváez, B. (2018). Matemática básica aplicada a la ingeniería civil. Universidad Piloto de Colombia. Tomada de: https://www.unipiloto.edu.co/descargas/MatematicaBasica.pdf

Narváez Bello, S. P., & Rincones Bonilla, D. (2019). Uso de Euclid: The Game en el aula para disfrutar la geometría Euclidiana. EIEI - ACOFI. file:///C:/Users/g-gpenagos/Downloads/biteca,+3086-4052-1-PB.pdf

Schames, I. (1999). Mecánica vectorial para ingenieros Estática (4ª edición). PRENTICE HALL IBERIA.

6. Anexos

6.1 Alfabeto griego

Estas expresiones simbólicas se representan a menudo en prefijos y sufijos o siglas empleadas en la matemática y el cálculo básico de la ingeniería. Los primeros tratados científicos fueron escritos en griego. En la siguiente tabla se relacionan cada una de las 24 letras griegas y su expresión mayúscula y minúscula.

Tabla 15. Procedimiento del ejemplo resuelto 19

Denominación	Minúscula	Mayúscula
alfa	α	Α
beta	β	Β
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ε	Ε
zeta	ζ	Ζ
eta	η	Η
theta	θ	Θ
iota	ι	Ι
kappa	κ	Κ
lambda	λ	Λ
mu	μ	Μ
nu	ν	Ν
xi	ξ	Ξ
ómicron	ο	Ο
pi	π	Π
rho	ρ	Ρ
sigma	σ	Σ
tau	τ	Τ
ípsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
ji o chi	χ	Χ
psi	Ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Fuente. Elaboración propia. Nota.

Algunos ejemplos de letras empleadas en la ingeniería son: posición angular Theta (Θ), frecuencia angula omega (ω) y densidad de un fluido Rho (ρ).

6.2. Conceptos básicos de trigonometría

La trigonometría es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones existentes en los lados del triángulo y sus ángulos, estos ángulos identificados con letras griegas. Su representación se realiza teniendo en cuenta el plano de referencia, si su vértice coincide con el origen y el ángulo se abre a partir del eje x positivo, entonces, éste se encuentra en posición canónica o normal, tal como se muestra en la Figura 1.

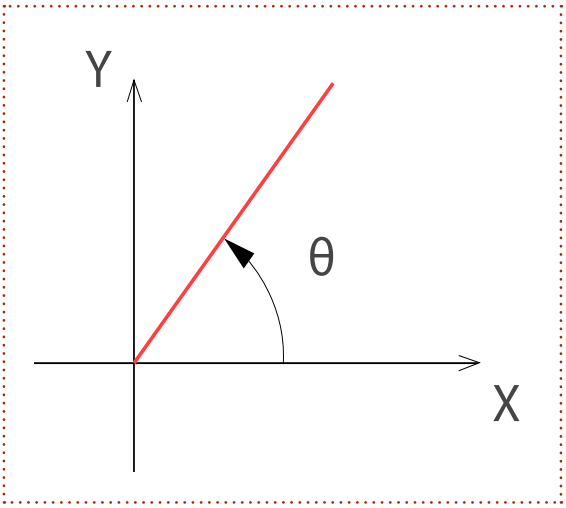


Figura 1. Representación del ángulo

Fuente: Elaboración propia

El ángulo se calcula a partir del eje x positivo en sentido antihorario, en sentido horario el ángulo es negativo. La unidad empleada para determinar la rotación es el grado y los radianes. Para efectos de conversiones, pi (π) es 3,1416, aproximadamente, y equivale a 180^0. Si se desea conocer el valor en radianes de un ángulo expresados en grados, se realiza la siguiente operación:

$$45^0 = 45^0 \, x \; \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{4} \; radianes$$

$$135^0 = 135^0 \, x \; \frac{\pi}{180^0} = \frac{3\pi}{4} \; radianes$$

Sea el triángulo ABC, con ángulos: β, Θ y ∞. Este se puede denominar de acuerdo con la longitud de sus lados: equilátero, si sus tres lados son iguales; isósceles, si dos de sus lados son iguales; y escaleno, si sus tres lados son diferentes. De acuerdo con sus ángulos: acutángulo, si todos los ángulos miden menos de 90^0, Obtuso; acutángulo, si uno de sus ángulos es mayor a 90^0 y rectángulo si uno de sus lados mide 90^0.

A partir del triángulo rectángulo de realizar una descripción de su composición e identidades básicas.

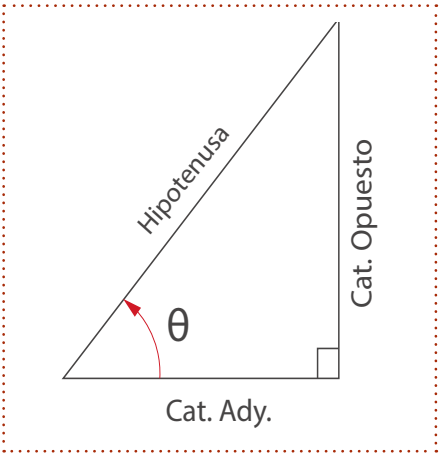


Figura 2. Identidades básicas

Fuente: Elaboración propia

$$Sen\ \Theta = \frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$Cos\ \Theta = \frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$Tan\ \Theta = \frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente}$$

De estas identidades se pueden obtener las demás, tal como se muestra a continuación:

$$Sec\ \Theta = \frac{1}{Cos\ \Theta} = \frac{Hipotenusa}{Cat.Adyacente}$$

$$Csec\ \Theta = \frac{1}{Sen\ \Theta} = \frac{Hipotenusa}{Cat.Opuesto}$$

$$Ctan\ \Theta = \frac{Cos\ \Theta}{Sen\ \Theta} = \frac{Cat.Adyacente}{Cat.Opuesto}$$

También se puede interpretar el teorema de Pitágoras de la siguiente forma: Cateto adyacente (a), cateto opuesto (b) e Hipotenusa (H):

$$H^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema se emplea para determinar la norma de un vector y la magnitud de las componentes de la hipotenusa.

6.3. Geometría básica

La geometría es importante en la ingeniería, de ella dependen los cálculos básicos cuando se trata de medir y aplicar las propiedades de puntos, líneas, ángulos, planos y sólidos.

Sus conceptos están relacionados entre sí: una recta es una sucesión infinita de puntos, un ángulo representa la intersección de dos líneas rectas que forman un vértice, un plano está conformado por dos o más ángulos y un sólido está conformado por tres o más planos.

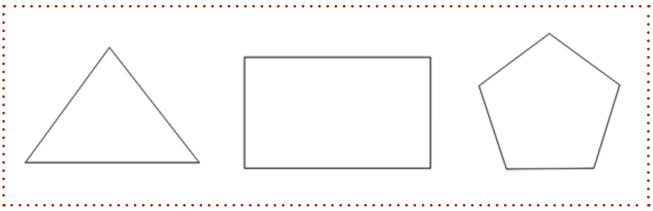


Figura 3. Polígonos

Fuente: Elaboración propia

En las figuras planas mostradas en la Figura 3, se tiene: un triángulo está conformado por tres líneas que forman tres vértices (ángulos cuya suma es 180^0) y estos conforman un plano. El rectángulo lo forman cuatro líneas en cuyos vértices el ángulo es de 90^0. Una característica básica de las figuras regulares es tener lados iguales y ángulos iguales, por ejemplo, en el caso de la figura de cinco lados, el pentágono, el ángulo es $360/5 = 72^0$.

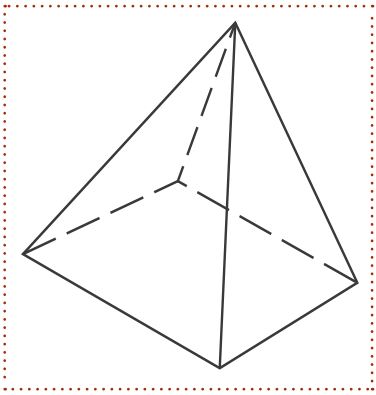


Figura 4. Identidades básicas

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4 se muestra un sólido conformado por cinco planos, una pirámide rectangular, el cual consta de ocho líneas y cinco vértices.

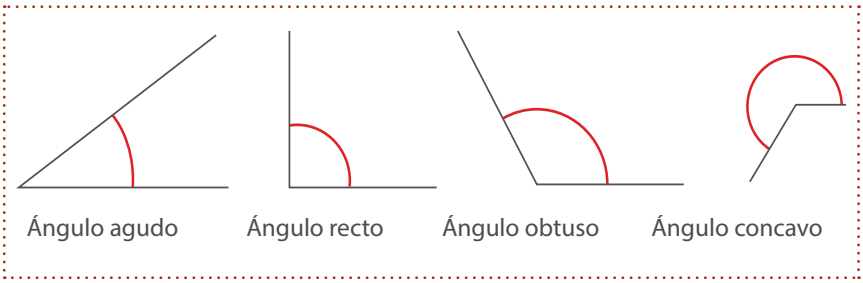


Figura 5. Clasificación de ángulos

Fuente: Elaboración propia

Los vértices conformados por líneas difieren en su denominación, dependiendo del ángulo que formen: Agudo cuando es menor a 90^0, recto cuando el ángulo es de 90^0, obtuso cuando el ángulo esta entre 90^0 y 180^0 y cóncavo cuando está entre 180^0 y 360^0.

6.4. Análisis de la línea recta

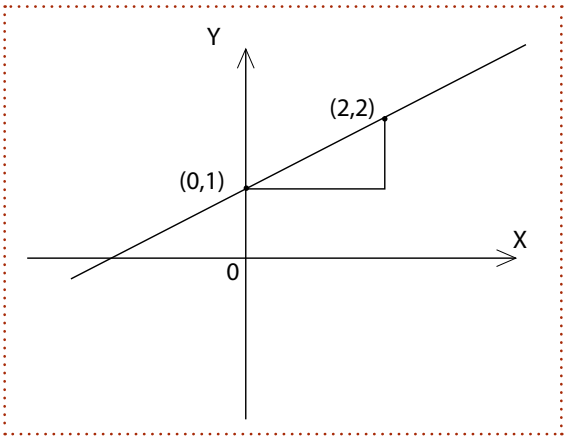


Figura 6. La recta en el plano

Fuente: Elaboración propia

La ecuación de la recta es: $Y = mx + b$; donde m es la pendiente y b es la intersección de la recta con el eje Y. Para determinar la pendiente, ésta se calcula mediante la fórmula:

$$Pendiente(m) = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que la intersección es 1, la ecuación de la recta se expresa:

$$Y = \frac{1}{2} X + 1$$

La pendiente es positiva, lo cual indica que la recta es creciente. En caso de que la pendiente sea negativa, ésta decrece.

Cuando dos rectas paralelas CE y EF son atravesadas por otra recta GH, los ángulos son opuestos por el vértice y los ángulos alternos internos son iguales.

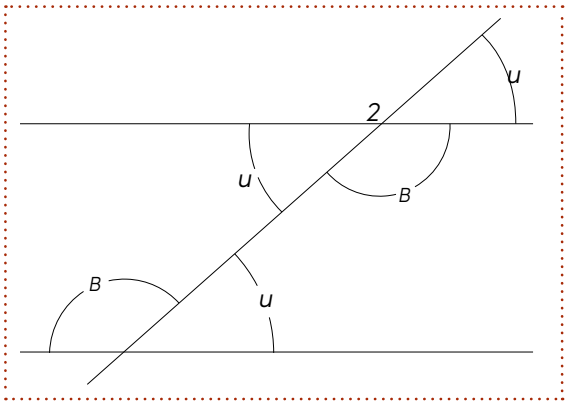


Figura 7. Ángulos alternos – internos

Fuente: Elaboración propia

Analizando los vértices 1 y 2 de la Figura 6, se encuentra que los ángulos B y u son alternos internos, además, son complementarios porque su suma es igual a 180^0.

Polígonos

Un polígono es una figura plana formada por tres o más líneas. Éstas pueden ser regulares si tiene sus lados y ángulos iguales o irregulares cuando sus lados o ángulos no son iguales.

Los polígonos se pueden clasificar por el número de lados: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, entre otros.

Los triángulos a su vez se clasifican: de acuerdo con sus lados:

- Escaleno: tiene ángulos y lados diferentes.
- Isósceles: tiene dos lados iguales.
- Equilátero: tiene los tres ángulos y lados iguales.

Los cuadriláteros son polígonos que tiene cuatro lados. Estos se clasifican así:

- Trapecio, sus ángulos son diferentes a 90^0.
- Paralelogramo, los lados son paralelos dos a dos.
- Rectángulo, sus ángulos son de 90^0.

6.5 Cálculos básicos en geometría

Perímetros: Es la suma de cada uno de sus lados
Área de un triángulo: (base x altura)/2
Área del rectángulo: base x altura
Área del paralelogramo: base x altura
Área de la circunferencia: πr^2

Para el cálculo del área de polígonos regúlales, es necesario conocer la apotema, siendo ésta la distancia desde el centro al punto medio de un lado. La fórmula empleada en polígonos regulares es:

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Donde r es el radio de la circunferencia en la cual está inscrito el polígono y l es el lado del polígono.

Área de un polígono regular es:

$$A = \frac{perimetro\ x\ apotema}{2}$$

$$A = \frac{p\ x\ \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{2}$$

Algunas fórmulas de volúmenes:

Cubo: $V = L^3$
Caja isométrica $V = Base\ x\ altura\ x\ Profundidad$
Cilindro: $V = área\ de\ la\ base\ x\ altura$
Cono: $V = (1/3)\ h\ \pi\ r^2$
Cono truncado: $V = (1/3)\ h\ \pi(R^2 + r^2 + Rr)$
Esfera: $V = (4/3)\ \pi\ r^3$

Esta cartilla se finalizó en agosto del 2023
por la Universidad Piloto de Colombia.
Se emplearon las familias
tipográficas Work Sans y Lora

θ = 0,2326π