

Taller de inducción en matemáticas

Cartilla de ejercicios



Luz Yecenia Méndez Herrera

Taller de inducción en matemáticas : Cartilla de ejercicios/ Luz Yacenia Méndez Herrera.
-- Bogotá: Universidad Piloto de Colombia, 2022

92 Páginas

Incluye referencias

ISBN: 9789585106-86-4

1. MATEMÁTICAS – TRIGONOMETRÍA -- EJERCICIOS
2. MATEMÁTICAS – ARITMÉTICA -- EJERCICIOS
3. ALGEBRA – EJERCICIOS

CCD: 510

Presidente: Olinto Eduardo Quiñones Quiñones

Rectora: Ángela Bernal Medina

Director de Publicaciones y Comunicación Gráfica: Rodrigo Lobo-Guerrero Sarmiento

Director de Investigaciones: Mauricio Hernández Tascón

Coordinador de Publicaciones: Diego Ramírez Bernal

© Taller de inducción en matemáticas

Autor: Luz Yecenia Méndez Herrera

ISBN: 978-958-5106-86-4

Primera edición, 2022

Bogotá, Colombia

Coordinadora de la publicación: Catalina Moreno Correa

Diseño y diagramación: María Paula Martín - Juan Pablo Florez



Atribución - No comercial - Sin derivar: esta licencia es la más restrictiva de las seis licencias principales, solo permite que otros puedan descargar las obras y compartirlas con otras personas, siempre que se reconozca su autoría y al sello editorial pero no se pueden cambiar de ninguna manera ni se pueden utilizar comercialmente.

La obra literaria publicada expresa exclusivamente la opinión de sus respectivos autores, de manera que no representan el pensamiento de la Universidad Piloto de Colombia. Cada uno de los autores suscribió con la Universidad una autorización o contrato de cesión de derechos y una carta de originalidad sobre su aporte, por tanto, los autores asumen la responsabilidad del contenido de esta publicación.

Contenido

Capítulo 1. Números reales	11
Operaciones y propiedades de los números reales	15
Operaciones con números racionales	19
Orden en los números reales	21
Jerarquía de operaciones I	22
Ejercicios propuestos sobre operaciones y propiedades con números reales	24
Capítulo 2. Potenciación, radicación y logaritmación de números reales	30
Propiedades de exponentes, raíces y logaritmos	32
Jerarquía de operaciones II	38
Ejercicios propuestos sobre potenciación, radicación, logaritmación y propiedades	39
Capítulo 3. Factorización	45
Factor común	47
Diferencia de cuadrados	48
Suma y diferencia de cubos	49
Suma y diferencia de potencias iguales	49
Trinomios	50
Completar un trinomio cuadrado perfecto	51
Ejercicios propuestos sobre los casos de factorización	55

Capítulo 4. Ecuaciones	59
Ecuación lineal	60
Ecuación cuadrática	62
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	64
Ejercicios propuestos sobre resolución de ecuaciones	68
 Capítulo 5. Trigonometría básica	 73
Ángulos	74
Razones trigonométricas	76
Identidades trigonométricas	80
Ejercicios propuestos sobre trigonometría básica	81
 Respuestas a los ejercicios propuestos	 85
Ejercicios propuestos sobre operaciones y propiedades con números reales	85
Ejercicios propuestos sobre potenciación, radicación, logaritmicación y propiedades	86
Ejercicios propuestos sobre los casos de factorización	87
Ejercicios propuestos sobre resolución de ecuaciones	88
Ejercicios propuestos sobre trigonometría básica	89
 Referencias	 94

Introducción

El Área Común de Matemáticas de la Universidad Piloto de Colombia ha venido realizando por más de diez años, durante la primera semana de cada periodo académico, un curso nivelador llamado *Taller de inducción en matemáticas* para los estudiantes que ingresan a primer semestre de los programas académicos asociados a las facultades de Ciencias Sociales y Empresariales, Ingeniería, Arquitectura y Psicología. Dicho taller surge como respuesta a las necesidades que se han encontrado en los espacios académicos del área de matemáticas, correspondientes a los respectivos contenidos programáticos, en los cuales se han evidenciado falencias en los estudiantes en relación con algunos conceptos básicos de matemáticas que inciden en el óptimo desarrollo de las temáticas de los mismos. Este documento reúne algunos de esos conceptos, los cuales son necesarios para que los estudiantes puedan desenvolverse con éxito en estos primeros cursos de matemáticas.

Con base en lo anterior, esta cartilla puede ser considerada como una guía para los docentes encargados de orientar el *Taller de inducción en matemáticas* en cada programa académico, puesto que recopila y unifica el material didáctico que se ha venido aplicando en este espacio. Al final de cada capítulo hay una lista de ejercicios propuestos, incluyendo algunos problemas de aplicación, con el fin de ser desarrollados durante el mismo taller. Cabe aclarar que, para abordar el contenido de la cartilla, el estudiante debe tener un bagaje mínimo de conceptos básicos adquiridos gracias a las matemáticas escolares, como el concepto de número primo, mínimo común múltiplo

(MCM), máximo común divisor (MCD), criterios de divisibilidad, operaciones con polinomios, etc.

Es importante resaltar que este documento está diseñado para la revisión de conceptos que el estudiante previamente ha visto en su formación escolar; por lo tanto, no es un texto guía para ser usado en un primer curso de matemáticas básicas, dado que los capítulos en los cuales se organiza la cartilla no tienen un lenguaje ni una secuencia formal en la construcción de los conceptos matemáticos. No obstante, sí puede ser considerado como un texto de consulta para los estudiantes, dado que los conceptos específicos que se presentan en este libro se muestran a través de varios ejemplos y se utiliza un lenguaje sencillo, claro, concreto y práctico. Para profundizar en los temas aquí tratados, se recomienda consultar los libros citados en las referencias bibliográficas.

El contenido de esta cartilla se organiza en cinco capítulos: en el primero se hace una breve exposición de los diferentes sistemas numéricos que conforman el conjunto de los números reales al estudiar las operaciones aritméticas básicas entre ellos con sus respectivas propiedades. En el segundo capítulo se definen las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación con números reales de forma comparativa, de tal forma que el estudiante pueda visualizar cómo se relacionan y diferencian entre ellas. Asimismo, se exponen las propiedades, se dan ejemplos de cada una de ellas y se realizan algunas anotaciones importantes que hacen referencia a errores frecuentes que cometen los estudiantes en su implementación. Al final del capítulo, se revisa la jerarquía de las operaciones, y se hace énfasis en su importancia en la ejecución de cálculos mediados por una calculadora o computadora en general.

Dada la importancia de los casos de factorización en varias temáticas que se abordan en los diferentes cursos de cálculo, en el tercer capítulo se revisan varios de ellos: factor común, diferencia de cuadrados, suma y diferencia de cubos, potencias iguales y factorización de trinomios. En los ejemplos que se ilustran, se explica el paso a paso del procedimiento para cada caso de factorización expuesto. En el cuarto capítulo se aborda la solución de cuatro tipos de ecuaciones, comenzando por la ecuación lineal, después con la cuadrática y, finalmente, con las ecuaciones exponencial y logarítmica. Se ejemplifican diferentes estrategias de solución que incluyen la implementación

de varias propiedades estudiadas en los capítulos anteriores. Finalmente, en el quinto capítulo se revisan conceptos de trigonometría que serán muy útiles para los estudiantes de ingeniería en las diferentes aplicaciones que estudiarán en los cursos de física y matemáticas. Se estudia el concepto de ángulo, medida y representación, razones y funciones trigonométricas; el capítulo cierra con la recopilación de algunas identidades trigonométricas. Todos los ejercicios propuestos tienen su respectiva respuesta al final de la cartilla para que puedan ser consultadas por el estudiante durante su trabajo autónomo.

Capítulo 1. Números reales

Para comenzar, haremos un recorrido por los diferentes subconjuntos numéricos que conforman el gran conjunto de los números reales, los cuales son la principal fuente de trabajo en cualquier rama de las matemáticas, y, en general, de todas las ciencias. Después, realizaremos una breve descripción de los elementos que conforman cada subconjunto, en particular ilustraremos las diferentes representaciones que puede tener un número racional. En seguida, revisaremos las operaciones básicas de los números reales junto con sus respectivas propiedades. Al final del capítulo, proponemos una lista de ejercicios para practicar los conceptos estudiados.

En la infancia, el primer conjunto numérico con el que tenemos contacto es el conjunto de los números **Naturales** ($\mathbb{N}$) cuando aprendemos a contar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Posteriormente, cuando conocemos las operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación, división), aparecen las sustracciones, cuyo resultado podría ser un valor negativo, por ejemplo: $3 - 5 = -2$. Es entonces cuando identificamos el conjunto de los números **Enteros** ($\mathbb{Z}$):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

De igual forma, con los elementos de este conjunto encontramos las divisiones de números cuyo resultado no corresponde a un número entero sino decimal, por ejemplo: $5 \div 2 = 2,5$. Surge, entonces, la necesidad de conocer el conjunto de los números **Racionales** ($\mathbb{Q}$), el cual está compuesto por todos los números que se pueden escribir en forma de cociente $\frac{a}{b}$, donde el numerador a y el denominador b son números enteros, con $b \neq 0$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} (b \neq 0) \right\}$$

Dentro de este conjunto están los números que tienen diferentes representaciones, como fracción propia: cuando el numerador es menor que el denominador, por ejemplo $\frac{2}{5}$, o fracción impropia: cuando el numerador es mayor que el denominador, por ejemplo $-\frac{7}{3}$; fracción que, a su vez, también se puede representar como una fracción mixta $-2\frac{1}{3}$. En la figura 1 se muestra la representación de cada una de estas fracciones en la recta numérica:

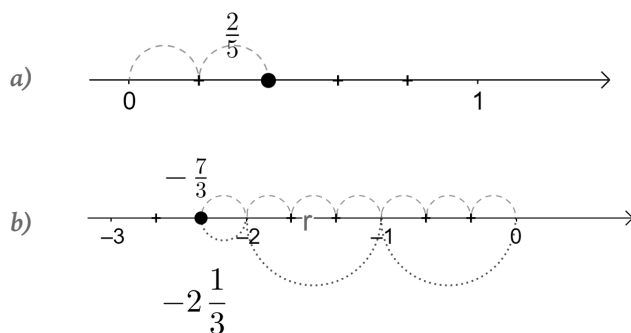


Figura 1. Representación en la recta numérica: a) fracción propia y b) fracción impropia, vista también como fracción mixta.

Fuente: elaboración propia.

Estas fracciones, a su vez, son la representación de un número decimal, bien sea decimal finito o decimal infinito periódico, como lo veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1.

Veamos cómo escribir un número *decimal finito* como un cociente de enteros:

- 1) $x = 3.25$ Consideremos un número decimal finito cualquiera,
- 2) $100x = 325$ Como hay *dos* cifras decimales multiplicamos por *100* a ambos lados de la igualdad.
- 3) $x = \frac{325}{100}$ Despejamos el valor de x .
- 4) $x = \frac{13}{4}$ Simplificamos para obtener la fracción en términos reducidos.

Ejemplo 1.2.

Veamos cómo escribir un número *decimal periódico puro* como un cociente de enteros:

- 1) $x = 5,\overline{237}$ Consideremos un número decimal periódico cualquiera,
- 2) $1000x = 5237,\overline{237}$ Como hay *tres* cifras decimales en el periodo, multiplicamos por *1000* a ambos lados de la igualdad.
- 3)
$$\begin{array}{r} 1000x = 5237,\overline{237} \\ -x = -5,\overline{237} \\ \hline 999x = 5232 \end{array}$$
 Restamos las ecuaciones (2) y (1) para eliminar la parte decimal periódica.
- 4) $x = \frac{5232}{999}$ Despejamos el valor de x .
- 5) $x = \frac{1744}{333}$ Simplificamos para obtener la fracción en términos reducidos.

Ejemplo 1.3.

Veamos cómo escribir un número *decimal periódico mixto* como un cociente de enteros:

- 1) $x = 32,19\overline{845}$ Consideremos un número decimal periódico mixto cualquiera,
- 2) $100000x = 3219845,8\overline{45}$ Como hay *cinco* cifras decimales (incluyendo el periodo), multiplicamos por *100000* a ambos lados de la igualdad.
- 3) $100x = 3219,8\overline{45}$ Como hay *dos* cifras decimales antes del periodo, multiplicamos por *100* a ambos lados de la igualdad,
- 4)
$$\begin{array}{r} 100000x = 3219845,8\overline{45} \\ - 100x = -3219,8\overline{45} \\ \hline 99900x = 3216626 \end{array}$$
 Restamos las ecuaciones (2) y (3) para eliminar la parte decimal periódica.
- 5) $x = \frac{3216626}{99900}$ Despejamos el valor de *x*.
- 6) $x = \frac{1608313}{49950}$ Simplificamos para obtener la fracción en términos reducidos.

Por otro lado, cualquier número que **NO** se pueda escribir como un cociente de números enteros es considerado un número *irracional* ($\mathbb{Q}'$). En este conjunto encontramos, entonces, los números decimales infinitos no periódicos, tales como los siguientes:

$$\sqrt{2} \approx 1,41421, \log_2 5 \approx 2,321928, \pi \approx 3,141592, e \approx 2,718281$$

Finalmente, el conjunto de los números *reales* ($\mathbb{R}$) corresponde a la unión de los números *racionales e irracionales*: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Es decir, un número real es o racional o irracional, pero no ambos. En la figura 2 podemos observar la relación de inclusión que existe entre estos conjuntos numéricos.

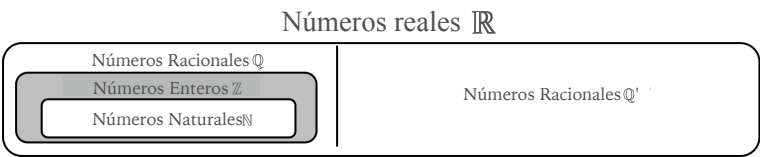


Figura 2. Subconjuntos de los números reales.

Operaciones y propiedades de los números reales

En el conjunto de los números reales se definen las operaciones *adición* (+) y *multiplicación* ($\cdot$). Si x e y son dos números reales, al resultado de la adición $x + y$ se le llama *suma*, y al resultado de la multiplicación $x \cdot y$ se le llama *producto* (en forma abreviada se escribe xy , sin el punto). En la tabla 1 encontramos una breve observación para tener en cuenta en cada una de ellas, con su respectivo ejemplo:

Tabla 1. Operaciones aritméticas básicas con números reales.

Operación	Para tener en cuenta	Ejemplo
Adición	Números reales con el mismo signo: se suman las cantidades absolutas ¹ y se deja el mismo signo.	$5 + 9 = 14$ $-3 - 8 = -11$
	Números reales con signos diferentes: se restan las cantidades absolutas y se deja el signo del número con la mayor cantidad absoluta.	$5 - 9 = -4$ $-3 + 8 = 5$

¹El *valor absoluto* de un número real x , lo cual se escribe $|x|$, corresponde a la distancia que hay entre el cero y dicho número x ; en consecuencia, siempre asume un valor positivo, por ejemplo: $|3| = 3$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$

Multiplicación	En el producto o división de números reales se puede utilizar la siguiente regla mnemotécnica, relacionada con los signos de cada factor: $(+) \cdot (+) = +$ $(+) \cdot (-) = -$ $(-) \cdot (+) = -$ $(-) \cdot (-) = +$	$5 \cdot 9 = 45$ $3 \cdot (-5) = -15$ $(-7) \cdot 2 = -14$ $(-8) \cdot (-3) = 24$	$\frac{10}{12} = 5$ $\frac{15}{-3} = -5$ $\frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ $\frac{-6}{-3} = 2$
----------------	---	---	--

Fuente: elaboración propia.

La *adición* y la *multiplicación* satisfacen las propiedades descritas en la tabla 2:

Tabla 2. Propiedades de la suma y producto de los números reales.

Propiedad	Descripción	Para cualquier	
		Adición	Multiplicación
Conmutativa	El orden de los términos (o el orden de los factores, en el caso del producto) no altera el resultado.	$x + y = y + x$	$xy = yx$
Asociativa	Para sumar (o multiplicar) tres o más números reales se puede agrupar de diferentes maneras sin alterar el resultado.	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
Elemento neutro	Para cada operación existe un único número real (llamado <i>elemento neutro</i>), tal que, al operarlo con cualquier número real x , el resultado es el mismo x .	$x + 0 = 0 + x = x$ 0 es el neutro de la suma	$x1 = 1x = x$ 1 es el neutro del producto

Elemento inverso	Para cada número real x , existe un número real (llamado <i>elemento inverso</i>), tal que, al operarse entre sí, se obtiene como resultado el neutro de la operación.	$x + (-x) =$ $(-x) + x = 0$ <i>$-x$ es el inverso aditivo (opuesto) de x</i>	$x = \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)x = 1$ (siempre que $x \neq 0$) $\frac{1}{x}$ es el inverso multiplicativo (recíproco) de x
Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	La multiplicación se distribuye con respecto a cada término en la suma (o resta).	$x(y \pm z) = xy \pm xz$	

Nota 1. Definición de sustracción y división.

La resta y la división de dos números reales se definen con respecto a la suma y al producto de la siguiente forma:

- Si x e y son números reales, la sustracción $x-y$ se define como la adición de x con el opuesto de y , es decir:

$$x-y = x + (-y)$$

- Si x e y son números reales, la división $x \div y$ se define como la multiplicación de x por el recíproco de y , es decir:

$$x \div y = \frac{x}{y} = x \left(\frac{1}{y}\right)$$

En consecuencia, como veremos, las propiedades que se apliquen a la adición y a la multiplicación de números reales también lo harán, respectivamente, a la sustracción y a la división teniendo en cuenta la definición anterior.

Ejemplo 1.4.

Veamos, a continuación, cómo se aplican las propiedades en las diferentes operaciones:

Tabla 3. Ejemplos de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para la suma y el producto.

Prop	Suma	Producto
Conmutativa	$3+5 \stackrel{?}{=} 5+3$ $8 \stackrel{\checkmark}{=} 8$	$3\cdot5 \stackrel{?}{=} 5\cdot3$ $15 \stackrel{\checkmark}{=} 15$
	$3-5 \stackrel{?}{=} -5+3$ $-2 \stackrel{\checkmark}{=} -2$	$3\cdot(-5) \stackrel{?}{=} (-5)\cdot3$ $-15 \stackrel{\checkmark}{=} -15$
Asociativa	$(-2+4)-7 \stackrel{?}{=} -2+(4-7)$ $2-7 \stackrel{?}{=} -2+(-3)$ $-5 \stackrel{\checkmark}{=} -5$	$((-2)\cdot4)\cdot(-7) \stackrel{?}{=} (-2)\cdot(4\cdot(-7))$ $(-8)\cdot(-7) \stackrel{?}{=} (-2)\cdot(-28)$ $56 \stackrel{\checkmark}{=} 56$
	$(-2-4)-7 \stackrel{?}{=} -2-(4+7)$ $-6-7 \stackrel{?}{=} -2-11$ $-13 \stackrel{\checkmark}{=} -13$	Observe que, en esta asociación, cuando el signo negativo (-) antecede el paréntesis, es necesario cambiar de signo los números dentro del mismo.
Distributiva	$5\cdot(3-8) \stackrel{?}{=} 5\cdot3 - 5\cdot8$ $5\cdot(-5) \stackrel{?}{=} 15 - 40$ $-25 \stackrel{\checkmark}{=} -25$	

Tabla 4. Ejemplos de elementos inversos para la suma y el producto.

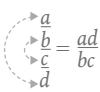
Número real	Inverso aditivo (opuesto)	Inverso multiplicativo (recíproco)
3	- 3	$\frac{1}{3}$
- 5	5	$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$
0.2	- 0.2	$\frac{1}{0.2}=5$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$-e$
π	$-\pi$	$\frac{1}{\pi}$
0	0	No tiene recíproco

Operaciones con números racionales

Teniendo en cuenta las propiedades descritas anteriormente para la adición y la multiplicación de números reales, vamos a operar, a continuación, números racionales cuando están representados mediante fracciones. En la tabla 5 se presentan algunas fórmulas prácticas para realizar las operaciones básicas con dos fracciones; en cada fórmula tenga en cuenta que a,b,c,d son números enteros diferentes de cero:

Tabla 5. Operaciones con números racionales.

Operación	Fórmula	Ejemplos
Adición o sustracción	<i>Fracciones homogéneas</i> $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{5-7}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
	<i>Fracciones heterogéneas</i> $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{(3)(7) - (4)(2)}{(4)(7)}$ $= \frac{21-8}{28} = \frac{13}{28}$
Multiplicación	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{(3)(2)}{(4)(7)} = -\frac{6}{28}$ $= -\frac{3}{14}$
División	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ 	$\frac{3}{4} \div \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{(3)(7)}{(4)(2)} = -\frac{21}{8}$ $-\frac{21}{8} = \frac{(2)(4)}{(3)(5)} = \frac{8}{15}$

Para adicionar (o sustraer) más de dos fracciones, se puede aplicar la propiedad asociativa para sumar cada dos fracciones. No obstante, también se podrían amplificar las fracciones dadas a fracciones homogéneas, para tal fin, se busca un denominador común a través del mínimo común múltiplo de los denominadores, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.

Efectuar las siguientes operaciones con tres fracciones:

$$\frac{8}{21} + \frac{5}{12} - \frac{3}{14}$$

Primero, buscamos el MCM de los denominadores al hacer una descomposición simultánea de los tres denominadores:

$$\begin{array}{ccc|c} 21 & 12 & 14 & 2 \\ 21 & 6 & 7 & 2 \\ 21 & 3 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

$$MCM(21, 12, 14) = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

Se homogenizan las tres fracciones al igualar los denominadores al MCM:

$$\frac{8}{21} = \frac{8(4)}{21(4)} = \frac{32}{84}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5(7)}{12(7)} = \frac{35}{84}$$

$$\frac{3}{14} = \frac{3(6)}{14(6)} = \frac{18}{84}$$

En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{8}{21} + \frac{5}{12} - \frac{3}{14} &= \frac{8(4) + 5(7) - 3(6)}{84} \\ &= \frac{32 + 35 - 18}{84} \\ &= \frac{49}{84} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.**Problema de aplicación**

Un estudiante en la Universidad Piloto de Colombia obtiene las siguientes notas en el curso de cálculo: primer corte 3,5; segundo corte 2,7; tercer corte 4,2. Teniendo en cuenta que el primer y segundo corte equivalen al 30 % de la nota definitiva (cada uno) y el tercer corte al 40 % restante, calcule la nota definitiva del estudiante.

Teniendo en cuenta que el x % de una cantidad C corresponde a x veces la centésima parte de C , es decir: $\frac{x C}{100}$ entonces:

$$\begin{aligned}
 (3.5)\left(\frac{30}{100}\right) + (2.7)\left(\frac{30}{100}\right) + (4.2)\left(\frac{40}{100}\right) &= \left(\frac{35}{10}\right)\left(\frac{30}{100}\right) + \left(\frac{27}{10}\right)\left(\frac{30}{100}\right) + \left(\frac{42}{10}\right)\left(\frac{40}{100}\right) \\
 &= \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{27}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{21}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) \\
 &= \frac{21}{20} + \frac{81}{100} + \frac{42}{25} \\
 &= \frac{21(5) + 81 + 42(4)}{100} \\
 &= \frac{105 + 81 + 168}{100} \\
 &= \frac{354}{100} \\
 &= 3,54
 \end{aligned}$$

Orden en los números reales

Un número real a positivo se denota por $a > 0$, y a su vez $a < 0$ denota un número real a negativo. Dados dos números reales a y b , decimos que $a > b$ si $a - b > 0$. El conjunto de los números reales es totalmente ordenado; esto significa que dados dos números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes condiciones: $a > b$, $a = b$, $a < b$. En particular, dos números racionales se pueden comparar fácilmente si utilizamos su representación como cociente, homogenizando las fracciones, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.7.

Establecer la relación de orden en los siguientes pares de fracciones:

a) $\frac{5}{2} \square \frac{7}{12}$

b) $\frac{24}{2} \square \frac{60}{12}$

c) $\frac{1}{4} \square \frac{2}{7}$

Para cada caso podemos homogenizar las fracciones igualando su denominador con el mínimo común múltiplo de los denominadores:

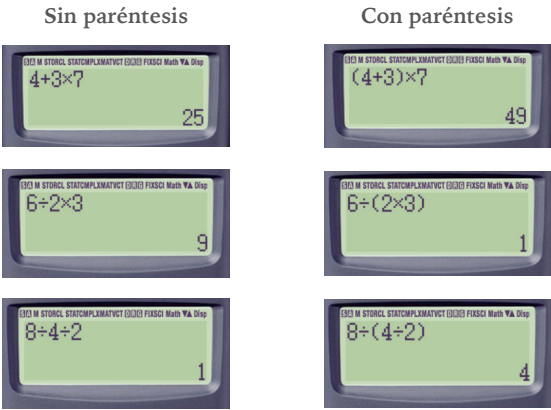
a) $\frac{5 \times 6}{2 \times 6} = \frac{30}{12} [>] \frac{7}{12}$

b) $\frac{24 \times 5}{2 \times 5} = \frac{120}{10} [=] \frac{120}{10} = \frac{60 \times 2}{5 \times 2}$

c) $\frac{1 \times 7}{4 \times 7} = \frac{7}{28} [<] \frac{8}{28} = \frac{2 \times 4}{7 \times 4}$

Jerarquía de operaciones I

Cuando queremos calcular una expresión que contenga varias operaciones simultáneamente en una calculadora, o en general en un computador, debemos tener mucho cuidado con la escritura, dado que el lenguaje con el cual están programados se basa en la jerarquía propia que tienen las operaciones. El uso o no de un paréntesis puede cambiar radicalmente el resultado de la operación, como podemos observar en los cálculos que se ilustran en la figura 4. En la tabla 6 se expone dicha jerarquía comenzando en orden de prioridad.



2 °	Multiplicación · ,×	En una expresión sin paréntesis que contenga sumas (o restas) y multiplicaciones (o divisiones), se deben resolver primero estas últimas, antes de las sumas (o restas).	$2+3\times 5$ $=2+15$ $=17$
	División ÷ ,/		$10-20\div 5$ $=10-4$ $=6$
		Si en una misma expresión solamente hay multiplicaciones y divisiones (o solo divisiones), conviene expresar las divisiones como el producto por el recíproco (véase la nota 1).	$\frac{3}{2}\div \frac{5}{4}\div 3\div \frac{1}{8}$ $=\frac{3}{2}\times \frac{4}{5}\times \frac{1}{3}\times \frac{8}{1}$ $=\frac{4\times 1\times 4}{5\times 1}$ $=\frac{16}{5}$
3 °	Adición y sustracción + , -	Una expresión sin paréntesis que solamente contenga sumas o restas se puede resolver agrupando términos con el mismo signo o, si se prefiere, de izquierda a derecha.	$10-20+5-8$ $=15-28$ $=-13$

Ejercicios propuestos sobre operaciones y propiedades con números reales

- 1.1. Clasifique cada uno de los siguientes enunciados como verdadero (V) o falso (F). Justifique su respuesta.
- a) () $\frac{-25}{-5}$ es un número entero positivo.

b) () $\frac{\pi}{2}$ es un número racional.

c) () -3 no es un número racional.

d) () $\sqrt{5}$ es un número irracional.

e) () $\frac{5}{0}$ es un número real.

- a) $-0.16 =$ _____
- b) $3.\bar{5} =$ _____
- c) $4.12\bar{5} =$ _____
- d) $0.42\bar{7} =$ _____
- e) $217.4\bar{5}1 =$ _____
- f) $3.\bar{9} =$ _____

1.5. Resuelva los siguientes polinomios aritméticos en el conjunto de los números reales teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones:

a) $2-4-(-5)+8=$ _____

b) $6(-2)-7(-3)-4-3=$ _____

c) $5-[7-2(-1-9)-3+12]+4=$ _____

d) $4(-8)-3[7-32\div(-8)+9]=$ _____

e) $-9+[10\div(-3-2)-1]+4(-3)=$ _____

f) $(-3)(-4)-(36\div 3-2\cdot 4+8)\div 4+1-3\cdot 5=$ _____

g) $6-(-9+7-1)-[3-(-5+4+6)-1]=$ _____

h) $3-[2+(14-20\div 4-10)-4\cdot(-3)]-6(-2)=$ _____

1.6. Realice las siguientes operaciones con números racionales:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=$ _____

b) $5\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=$ _____

c) $(3+\frac{1}{4})-(2+\frac{1}{6})=$ _____

d) $\frac{1}{2}\div(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=$ _____

e) $-2\div\left[-\frac{1}{3}\left(4-\frac{5}{2}\right)+2\frac{3}{7}-3\right]+\left(\frac{3}{12}-\frac{5}{4}\right)\div\frac{3}{5}=$ _____

f) $\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=$ _____

g) $(\frac{5}{3}-1)\cdot(\frac{7}{2}-2)=$ _____

$$\text{h) } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\text{i) } \left[\frac{5}{3} \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \right] \left[\frac{4}{3} - \frac{5}{7} \right] \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\text{j) } \left[\left(4 - \frac{1}{3} \right) \div 2\frac{1}{7} + \frac{4}{7} \right] 2^{-4} + 2\frac{3}{5} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- 1.7. De los 800 alumnos de un colegio han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
- 1.8. Una moto, cuyo precio era de \$ 3 500 000, cuesta en la actualidad \$600 000 más. ¿Cuál es el porcentaje del aumento?
- 1.9. ¿Cuál será el precio que se debe marcar en un artículo si costó \$15 800 y si al venderlo se quiere ganar el 10 %?

- 1.10. Tres socios invirtieron \$ 500 000, \$ 700 000 y \$ 1 100 000 en un negocio. Después de un año, obtuvieron una ganancia de \$ 300 000. ¿Cuánto le corresponde a cada socio de la ganancia si debe repartirse proporcionalmente a lo que cada uno invirtió?

Capítulo 2. Potenciación, radicación y logaritmación de números reales

Una vez definidas las operaciones básicas en el capítulo anterior, a continuación definiremos tres operaciones más: potenciación, radicación y logaritmación, las cuales se basan principalmente en la multiplicación de los números reales. También, estableceremos las propiedades correspondientes para cada una de ellas, base fundamental para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas que serán abordadas en el capítulo 4.

En la tabla 7 definiremos las tres operaciones: *potenciación*, *radicación* y *logaritmación*, y desarrollaremos cómo se relacionan entre ellas en el conjunto de los números reales. Para tal fin, identificamos en la siguiente expresión los tres elementos: base, exponente y potencia:

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ \text{Base} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{n} \\ \boxed{a} \end{array} = \boxed{b} \begin{array}{c} \text{Potencia} \end{array}$$

Tabla 7. Definición de las operaciones: potenciación, radicación y logaritmación.

Potenciación	Radicación	Logaritmación
<i>Se busca: la potencia</i>	<i>Se busca: la base</i>	<i>Se busca: el exponente</i>
En la potenciación la base $a \in \mathbb{R}$ se multiplica por sí misma tantas veces como indique el exponente $n \in \mathbb{Z}^+$. Al resultado $b \in \mathbb{R}$ de ese producto se le conoce como potencia.	En la radicación dada la potencia $b \in \mathbb{R}$ y el exponente (<i>índice</i>) $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ se busca la base $a \in \mathbb{R}$ (<i>raíz</i>), de tal forma que se satisfaga la ecuación $a^n = b$	En la logaritmación dada la base $a > 0$ y la potencia $b > 0$ se busca el exponente n (<i>logaritmo</i>), de tal forma que se satisfaga la ecuación $a^n = b$.
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n = b$ n veces la base a	$\sqrt[n]{b} = a$	$\log_a b = n$

Ejemplo 2.1.

Veamos cómo se relacionan las tres operaciones en los siguientes ejemplos:

Tabla 8. Ejemplos que comparan las tres operaciones: potenciación, radicación y logaritmación.

Potenciación	Radicación	Logaritmación
$3^2 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{2 \text{ veces}} = 9$ $(-3)^2 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{2 \text{ veces}} = 9$	$\sqrt{9} = 3$ (Aunque en los números reales 9 tiene dos raíces cuadradas ± 3 el símbolo $\sqrt{}$ representa la raíz positiva, llamada raíz principal)	$\log_3 9 = 2$ (El logaritmo no está definido para bases negativas)
$(-2)^5 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{5 \text{ veces}} = -32$	$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\log_2 32 = 5$
(Observe que, si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia será negativa)	(Observe que la raíz no está definida si la potencia es negativa y el exponente es par)	(El logaritmo no está definido para bases negativas)

$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{4 \text{ veces}} = 16$	$\sqrt[4]{16} = 2$	$\log_2 16 = 4$
(Observe que, si la base es negativa y el exponente es par, la potencia será positiva)	(Aunque 16 tiene dos raíces cuartas ± 2 el símbolo $\sqrt[n]{}$ representa la raíz positiva, llamada raíz principal)	(El logaritmo no está definido para bases negativas)

Propiedades de exponentes, raíces y logaritmos

Tabla 9. Propiedades de exponentes para números reales a y b con exponentes enteros n y m.

n.º	Definición/notación/ propiedad	Ejemplo	Observación
1	Definición: $a^0 = 1$ $a \neq 0$	$3^0 = 1$	La expresión 0^0 no está definida
2	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$	La expresión $a^{-1} = \frac{1}{a}$ representa el recíproco del número a El número 0 es el único número real que NO tiene recíproco. <i>Más adelante verás que...</i> esta propiedad será muy útil cuando se deriven o integren funciones que involucren potencias.
3	Notación: $a^1 = a$	$3^1 = 3$ $0^1 = 0$	Esto se tiene simplemente por la definición de la potenciación.

4	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\begin{array}{rcl} 3^4 \cdot 3^2 & \stackrel{?}{=} & 3^6 \\ 81 \cdot 9 & \stackrel{?}{=} & 729 \\ 729 & \stackrel{\checkmark}{=} & 729 \end{array}$	$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5$
5	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\begin{array}{rcl} \frac{5^7}{5^3} & \stackrel{?}{=} & 5^4 \\ \frac{78125}{125} & \stackrel{?}{=} & 625 \\ 625 & \stackrel{\checkmark}{=} & 625 \end{array}$	$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a}^3}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$
6	$(a^n)^m = a^{nm}$	$\begin{array}{rcl} (2^3)^4 & \stackrel{?}{=} & 2^{12} \\ 8^4 & \stackrel{?}{=} & 4096 \\ 4096 & \stackrel{\checkmark}{=} & 4096 \end{array}$	$(a^2)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6$
7	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\begin{array}{rcl} (3 \cdot 5)^2 & \stackrel{?}{=} & 3^2 \cdot 5^2 \\ 15^2 & \stackrel{?}{=} & 9 \cdot 25 \\ 225 & \stackrel{\checkmark}{=} & 225 \end{array}$	En sumas o restas no se distribuyen los exponentes, es decir: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\begin{array}{rcl} \left(\frac{2}{3}\right)^5 & \stackrel{?}{=} & \frac{2^5}{3^5} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & \stackrel{?}{=} & \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \\ \frac{32}{243} & \stackrel{\checkmark}{=} & \frac{32}{243} \end{array}$	Por ejemplo: $\begin{array}{rcl} (3+4)^2 & \stackrel{?}{=} & 3^2+4^2 \\ 7^2 & \stackrel{?}{=} & 9+16 \\ 49 & \neq & 25 \end{array}$
9	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$	$\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{3^4}{2^4} \\ \phantom{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \end{array}$	La expresión $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$ representa el recíproco de $\frac{5}{3}$

Tabla 10. Propiedades de raíces para números reales positivos a y b, con n y m enteros positivos*.

n.	Definición / notación / propiedad	Ejemplo	Observación
1	Definición: $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$	$\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{2^9}=2^{9/3}=2^3=8$	Con base en esta definición las propiedades de exponentes también aplican para las raíces cuando se reescriben como exponentes. <i>Más adelante verás que...</i> esta propiedad será muy útil cuando se deriven o integren funciones que involucren raíces.
2	Notación: $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$	$\sqrt{9}=3$	El símbolo $\sqrt{}$ representa la raíz positiva de un número real positivo.
3	$\sqrt[n]{a^n}=a$ $a>0$	$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$	En particular, para cualquier: $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2}= x $ $=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$
4	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}$ $=\sqrt[nm]{a^{n+m}}$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\stackrel{?}{=} \sqrt[6]{2^{3+2}}$ $(1.2599)\cdot(1.4142)\stackrel{?}{=} \sqrt[6]{32}$ $1.7817\stackrel{?}{=} 1.7817$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=a^{1/n}\cdot a^{1/m}$ $=a^{1/n+1/m}$ $=a^{\frac{n+m}{nm}}$
5	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{2}}\stackrel{?}{=} \sqrt[15]{2^{5-3}}$ $\frac{1.2599}{1.1487}\stackrel{?}{=} \sqrt[15]{4}$ $1.0968\stackrel{?}{=} 1.0968$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{a^{1/n}}{a^{1/m}}$ $=a^{1/n-1/m}$ $=a^{\frac{m-n}{nm}}$

Nota: para los ejemplos de las propiedades 4, 5, 6 y 9 se aproximó el valor a 4 cifras decimales.

6	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt[3 \cdot 2]{2}$ $\sqrt[3]{1.4142} \stackrel{?}{=} \sqrt[6]{2}$ $1.1225 \stackrel{?}{=} 1.1225$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n}$ $= a^{(1/n) \cdot (1/m)}$ $= \frac{1}{a^{mn}}$
7	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{9 \cdot 16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$ $\sqrt{144} \stackrel{?}{=} 3 \cdot 4$ $12 \stackrel{?}{=} 12$	En sumas o restas no se distribuyen las raíces, es decir: $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$
8	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{9}{16}} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$ $\sqrt{0.5625} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$ $0.75 \stackrel{?}{=} 0.75$	Por ejemplo: $\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$ $\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$ $5 \neq 7$
9	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$	$5^{-2/3} = \frac{1}{5^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \approx \frac{1}{2.924} \approx 0.342$	La expresión $(5)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ representa el recíproco de $\sqrt[3]{5^2}$

Tabla 11. Propiedades de logaritmos para números reales positivos X y Y con bases a y b reales positivas.

n.	Notación / propiedad	Ejemplo	Observación
1	Notación: $\log_{10} X = \log X$	$\log 10000 = 4$	Identificar en la calculadora la tecla: 
2	Notación: $\log_e X = \ln X$	$\ln 2 \approx 0.6931471806$	Identificar en la calculadora la tecla: 
3	$\log_a (X \cdot Y) = \log_a X + \log_a Y$	$\log_2 (8 \cdot 16) \stackrel{?}{=} \log_2 8 + \log_2 16$ $\log_2 (128) \stackrel{?}{=} 3 + 4$ $7 \stackrel{?}{=} 7$	Propiedad de exponentes relacionada: $a^n \cdot b^m = a^{n+m}$

4	$\log_a \left(\frac{X}{Y}\right) = \log_a X - \log_a Y$	$\log_2 \left(\frac{32}{8}\right) \stackrel{?}{=} \log_2 32 - \log_2 8$ $\log_2 (4) \stackrel{?}{=} 5 - 3$ $2 \stackrel{?}{=} 2$	Propiedad de exponentes relacionada: $\left(\frac{a^n}{b^m}\right) = a^{n-m}$
5	$\log_a (X^n) = n \log_a X$	$\log_2 (4^3) \stackrel{?}{=} 3 \log_2 4$ $\log_2 (64) \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2$ $6 \stackrel{?}{=} 6$	Propiedad de exponentes relacionada: $(a^n)^m = a^{nm}$
6	$\log_a 1 = 0$	$\log_5 1 = 0$ $\log 1 = 0$ $\ln 1 = 0$	Propiedad de exponentes relacionada: $a^0 = 1$
7	$\log_a a = 1$	$\log_7 7 = 1$ $\log 10 = 1$ $\ln e = 1$	Propiedad de exponentes relacionada: $a^1 = a$
8	$\log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$ (Cambio de base de a a b)	$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$	Esta propiedad permite calcular cualquier logaritmo (racional o irracional) con los logaritmos $\log x$ o $\ln x$ usando una calculadora científica.
9	$\log_a (a^x) = x$	$\log_3 9 = \log_3 (3^2) = 2$ $\log 1000 = \log (10^3) = 3$ $\ln (e^5) = 5$	Más adelante comprenderás que... estas dos propiedades surgen como consecuencia de la composición de funciones y la existencia de una función inversa, lo que satisface que
10	$a^{\log_a x} = x$	$3^{\log_3 81} = 3^{\log_3 (3^4)} = 3^4 = 81$ $10^{\log 1000} = 10^{\log (10^3)} = 10^3 = 1000$ $e^{\ln 2} = 2$	$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

Ejemplo 2.2.

Para calcular o simplificar raíces y logaritmos podemos utilizar la descomposición en factores primos y el uso de las anteriores propiedades, como se ilustra a continuación:

Tabla 12. Simplificación de raíces y logaritmos a través de la descomposición en factores primos.

Radicación	Logaritimación	Descomposición	
$\sqrt{256} = \sqrt{2^8}$ $= 2^{8/2}$ $= 2^4$ $= 16$	$\text{Log}_2 256 = \log_2 2^8$ $= 8 \log_2 2$ $= 8(1)$ $= 8$		
$= \sqrt[3]{256} \quad \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2}$ $= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2}$ $= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2}$ $= 4\sqrt[3]{4}$	$\text{Log}_4 256 = \log_4 2^8$ $= \log_4 (2^2)^4$ $= \log_4 (4^4)$ $= 4$	$256 \begin{array}{l} 2 \\ 128 \ 2 \\ 64 \ 2 \\ 32 \ 2 \\ 16 \ 2 \\ 8 \ 2 \\ 4 \ 2 \\ 2 \ 2 \\ 1 \end{array}$	$2187 \begin{array}{l} 3 \\ 729 \ 3 \\ 243 \ 3 \\ 81 \ 3 \\ 27 \ 3 \\ 9 \ 3 \\ 3 \\ 1 \\ \square \end{array}$
$\sqrt[7]{1287} = \sqrt[7]{3^7} = 3$ $\sqrt[3]{1287} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^3 \cdot 3}$ $= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$ $= 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ $= 9\sqrt[3]{3}$	$\text{Log}_3 2187 = \log_3 3^7$ $= 7 \log_3 3$ $= 7(1)$ $= 7$	$256 = 2^8$	$2187 = 3^7$

Jerarquía de operaciones II

Para continuar con la jerarquía que tienen las operaciones vistas en el capítulo anterior incluimos ahora las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación:

En una expresión sin paréntesis que contenga potencias, raíces o logaritmos, estas operaciones priman sobre multiplicaciones, divisiones, sumas o restas. No obstante, en algunos casos, conviene aplicar primero las propiedades de las operaciones de este capítulo antes de operar.

Si la expresión contiene paréntesis, es importante identificar si la potencia, raíz o logaritmo afecta o no toda la expresión dentro del paréntesis (véase figura 5).



Figura 5. Ejemplos que ilustran como cambia el resultado en una calculadora cuando se escribe con o sin paréntesis las potencias, raíces o logaritmos.

Ejemplo 2.3.

Veamos cómo se pueden relacionar estas tres operaciones con las que se revisaron anteriormente:

Potencias	Raíces	Logaritmos
$(-2)^3 - 4[(-15+4)^2 - 3^2 \cdot 5^3]$ $= -8 - 4[(-11)^2 - 9 \cdot 125]$ $= -8 - 4[121 - 1125]$ $= -8 - 4[-1004]$ $= -8 + 4016$ $= 4008$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - 2\sqrt{5+15} + 3\sqrt{5}$ $= \sqrt[3]{2 \cdot 4} - 2\sqrt{20} + 3\sqrt{5}$ $= \sqrt[3]{8} - 2\sqrt{4 \cdot 5} + 3\sqrt{5}$ $= 2 - 2\sqrt{4} \sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ $= 2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ $= 2 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ $= 2 - \sqrt{5}$	$\log_2 160 - \log_2 5 + 3\log_2 4 \div 5 \log_2 2$ $= \log_2 \left(\frac{160}{5}\right) + \frac{\log_2 (4^3)}{\log_2 (2^5)}$ $= \log_2 (32) + \frac{\log_2 [(2^2)^3]}{\log_2 (2^5)}$ $= \log_2 (2^5) + \frac{\log_2 (2^6)}{\log_2 (2^5)}$ $= 5 + \frac{6}{5} = \frac{31}{5}$

Ejercicios propuestos sobre potenciación, radicación, logaritmicación y propiedades

2.1. Evalúe cada expresión (descomponga cada número en sus factores primos y simplifique usando las propiedades de exponentes).

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 (-3)^2 =$ _____
- b) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \left(\frac{9}{25}\right)^2 =$ _____
- c) $\sqrt[3]{9261} =$ _____
- d) $\frac{\sqrt[3]{729}}{3^2} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{256}} =$ _____
- e) $\sqrt[4]{50625} =$ _____
- f) $\sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{54} =$ _____

$$g) \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 \left(\frac{8}{27}\right)^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h) \frac{\left[2 - 1\frac{3}{5}\right]^2 + \left(5 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)^4 \left(7\frac{1}{2}\right)^3}{\left(5 - \frac{1}{8}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.2. Halle las siguientes sumas:

$$a) 2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b) 5\sqrt[3]{250} - 4\sqrt[3]{54} - 10\sqrt[3]{2} + 8\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c) \sqrt[4]{405} - 3\sqrt[4]{80} - 2\sqrt[3]{648} + 8\sqrt[3]{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.3. Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos:

$$a) \frac{a^{5/2} (2a^{5/4})^2}{a^{1/2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b) \sqrt[3]{a^2 b^3} \sqrt{64a^4 b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c) \frac{16xy^3 z^{-1}}{24x^{-1}y^3 z^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d) (2x^3 y^{-1/4})^2 (8y^{-3/2})^{-1/3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$e) \frac{(xy^2 z^3)^4}{(x^2 y^2 z)^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f) \frac{\sqrt{16 a^2 b^6 c^8}}{\sqrt[3]{216 a^3 b^9 c^{12}}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g) \left(\frac{ab^2 c^{-1}}{a^3 b^3 c}\right)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

h) $\left(\frac{5y^6 z^4}{20x}\right)\left(\frac{2xz^{-2}}{y^3}\right)^2 =$ _____

i) $\left(\frac{4y^3 \sqrt[3]{z^2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{x^{-3}y^6}{8z^4}} =$ _____

j) $\left(\frac{a^{16}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3 \left(\frac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right) =$ _____

k) $\frac{(9xy)^{32}}{(27x^3y^4)^{23}} \left(\frac{3x^{-2}}{4y^{1/2}}\right)^{-1} =$ _____

2.4. Calcule los siguientes logaritmos (si existen), haciendo uso de las propiedades:

a) $\log_2 512 =$ _____

b) $\log_2 0.5 =$ _____

c) $\log_5 0.008 =$ _____

d) $\log 10000 =$ _____

e) $\log_4 (-16) =$ _____

f) $\ln(e^3) =$ _____

2.5. Calcule los siguientes logaritmos en la calculadora haciendo cambio de base a logaritmo natural (aproxime su respuesta a 5 cifras decimales):

a) $\log_{4.5} 5 =$ _____

b) $\log_3 0.33 =$ _____

c) $\log_7 5.3 =$ _____

d) $\log_{2.3} 0.526 =$ _____

e) $\log_{1.5} 3.25 =$ _____

f) $\log_4 3 =$ _____

2.6. Usando las propiedades de los logaritmos calcule lo siguiente:

a) $\log_2 80 - \log_2 5 =$ _____

b) $\log_3 \sqrt[5]{81} =$ _____

c) $\log_2 \left(\frac{\sqrt{64} \cdot 2^3}{32 \cdot \sqrt{8}} \right) =$ _____

d) $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 10^{-2}}{10^5 \cdot 10^{-1}}} =$ _____

e) Si $\log_a X = 3$ y $\log_a Y = 2$ entonces $\log_a XY =$ _____

f) Si $\log_a X = 1.4650$ y $\log_a (XY)^2 = 4.1918$ entonces $\log_a Y =$ _____

g) $\log_3 \left(\frac{27}{243} \right) =$ _____

h) $e^{\ln 4} =$ _____

i) $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \right) =$ _____

j) $\log_5 \left(\frac{25}{2} \right) \log_5 2 =$ _____

2.7. En un experimento psicológico sobre aprendizaje (Haeussler y Paul, 2003) se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo fue un par de letras y cada respuesta fue un dígito, 1 o 2. Después de cada respuesta se le indicaba al sujeto cuál era la correcta. En este experimento de aprendizaje, denominado asociación de pares, la probabilidad teórica P de que el sujeto dé la respuesta correcta en el n -ésimo ensayo está dada por $P = 1 - \frac{1}{2} (1-c)^{n-1}$, $n \geq 1$, $0 < c < 1$.

Entonces encuentre P cuando $n=1$.

- 2.8. Para cierta ciudad, la población P crece a una tasa de 2 % por año. La fórmula $P = 1\,000\,000(1,02)^t$ proporciona la población t años después de 2020. Determine la población en (a) 2021 y (b) 2022.

- 2.9. A un cierto tiempo hay 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Esta decae, de modo que después de t años el número de miligramos presentes, N , está dado por $N = 100e^{-0.028t}$. ¿Cuántos miligramos están presentes después de 20 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

Capítulo 3. Factorización

Para seguir con la revisión de conceptos básicos, en este capítulo abordaremos los casos de factorización de polinomios dada su importancia en diferentes aplicaciones, tales como: simplificación de expresiones algebraicas y solución de ecuaciones e inecuaciones. Haremos una exposición de los casos más frecuentes de factorización y desarrollaremos varios de estos. Además, en el siguiente capítulo, haremos uso de la factorización de polinomios para resolver una ecuación cuadrática.

Una *expresión algebraica* es el resultado que se obtiene al operar un conjunto de *variables* (denotadas con letras como x, y, z , que pueden tomar cualquier valor) y *constantes* (denotadas con letras como a, b, c , que representan un valor específico en la expresión) mediante adición (o sustracción), multiplicación (o división), potenciación y radicación. El *dominio* de una expresión algebraica está formado por todos los números reales que pueden representar las variables. Cuando números específicos del dominio se sustituyen por las variables en una expresión algebraica, el número resultante se denomina *valor* de la expresión para estos números.

Ejemplo 3.1.

En la expresión algebraica:

$$\frac{3x^2 + \frac{27}{y^3}}{\sqrt{y^2 - 4}}$$

Las variables son x, y y las constantes son los números 3, 4, 27; vemos que se relacionan mediante las operaciones anteriormente descritas. El dominio es el conjunto en el cual la raíz cuadrada esté definida y el denominador sea diferente de cero, es decir: $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 4 > 0\}$. Si reemplazamos $x=2, y=3$, entonces el valor que toma la expresión se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{3x^2 + \frac{27}{y^3}}{\sqrt{y^2 - 4}} = \frac{3(2)^2 + \frac{27}{(3)^3}}{\sqrt{(3)^2 - 4}} = \frac{3(4) + \frac{27}{27}}{\sqrt{9 - 4}} = \frac{12 + 1}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

Una expresión de la forma ax^n se llama *monomio* en x , en el que $x \in \mathbb{R}$ es la variable, $a \in \mathbb{R}$ representa una constante y n es un entero no negativo. Un *binomio* en x es la suma de dos monomios en x y un *trinomio* en x es una suma de tres monomios en x . Un *polinomio* en x es una suma de cualquier número de monomios en x ; es decir, podemos representar un polinomio mediante la siguiente expresión:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En la cual llamaremos a cada monomio como *término*. Cada constante $a_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n$ se llama *coeficiente* y a_0 *término independiente* y la variable $x \in \mathbb{R}$.

Cuando un polinomio en x se puede expresar como el producto de dos o más polinomios en x , decimos que el polinomio es *factorizable*, y a los que se multiplican entre sí los llamamos *factores* o *divisores* del polinomio dado. Si no es posible factorizar uno de ellos, lo llamamos *factor primo* o *irreducible*.

Ejemplo 3.2.

- En un monomio los factores se pueden hallar por simple inspección; por ejemplo, en un monomio con tres variables $30xyz$ los factores son $2, 3, 5, x, y, z$, ya que: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot z = 30xyz$.
- El binomio $x+a$ solo es divisible por 1 y por $x+a$; por lo tanto, no es factorizable. En este caso decimos que es *primo*.
- Como $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$, decimos que las expresiones $x+2$ y $x+3$ son los factores del polinomio x^2+5x+6 . De hecho, como $x+2$ y $x+3$ no son factorizables, decimos que son factores primos.

Descomponer en factores o factorizar un polinomio es convertirlo en el producto indicado de sus factores primos. Existen algunos métodos o *casos de factorización* que simplifican el procedimiento de factorizar un polinomio. A continuación, veremos algunos de ellos

Factor común

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un factor común, expresamos el factor común como coeficiente de un paréntesis, dentro del cual escribimos la suma de los cocientes que se obtienen al dividir cada término por el factor común. Por ejemplo, en el binomio $xa+xb$, el *factor común* es x , y se puede factorizar por $x(a+b)$. El factor común puede ser monomio o polinomio.

Ejemplo 3.3.

1. $x^2-x=x(x-1)$
2. $3x^2+7x^3-5x^4 = x^2(3+7x-5x^2)$
3. $27x^2-54x-18=9(3x^2-6x-2)$
4. $15x^4+20x^3+45x=5x(3x^3+4x^2+9)$

Notemos que la expresión dentro del paréntesis tiene igual número de términos que la original, donde sus partes literales han disminuido su exponente en una cantidad igual al exponente del literal que se tomó como factor común.

Ejemplo 3.4.Factorizar $8x^3 + 4x^2 - 6x - 3$

$$= (8x^3 + 4x^2) + (-6x - 3) \quad \text{Agrupamos términos con factores comunes.}$$

$$= 4x^2(2x + 1) - 3(2x + 1) \quad \text{Factorizamos el polinomio dentro de cada paréntesis.}$$

$$= (2x + 1)(4x^2 - 3) \quad \text{Factorizamos el polinomio común.}$$

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ejemplo 3.5.1. Factorizar $x^2 - 16$:

$$\underbrace{x^2}_{x^2} - \underbrace{16}_{(4)^2} = (x + 4)(x - 4)$$

2. Factorizar $x^2 - 6$:

$$\underbrace{x^2}_{(x^2)} - \underbrace{6}_{(\sqrt{6})^2} = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$$

3. Factorizar $2x^3 - 8x$:

Primero sacamos el factor común y obtenemos un factor que es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 8x &= 2x(x^2 - 4) \\ &= 2x(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Suma y diferencia de cubos

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo 3.6.

1. Factorizar $8x^3 + 27$

$$\begin{aligned} \underbrace{8x^3} + \underbrace{27} &= (2x + 3) [(2x)^2 - (2x)(3) + 3^2] \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \\ (2x)^3 \quad 3^3 \end{aligned}$$

2. Factorizar $64x^6 - 125$

$$\begin{aligned} \underbrace{64x^6} - \underbrace{125} &= (4x^2 - 5) [(4x^2)^2 + (4x^2)(5) + 5^2] \\ &= (4x^2 - 5)(16x^4 + 20x^2 + 25) \\ (4x^2)^3 \quad 5^3 \end{aligned}$$

Suma y diferencia de potencias iguales

Para todo exponente n entero positivo:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Para exponente n impar:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Para exponente n par: $x^n + y^n$ no siempre es factorizable

Ejemplo 3.7.

1. Factorizar
- $x^4 - 16$
- :

$$\begin{aligned}
 &= (x-2)(x^3 + x^2(2) + x(2)^2 + (2)^3) \\
 &= (x-2)(x^3 + x^2 + 4x + 8) \quad \leftarrow \text{Esta expresión se puede factorizar aún más...} \\
 &= (x-2)[x^2(x+2) + 4(x+2)] \\
 &= (x-2)[(x^2+4)(x+2)] \\
 &= (x-2)(x^2+4)(x+2)
 \end{aligned}$$

2. Factorizar
- $x^7 + 1$
- :

$$= (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

3. Factorizar
- $x^{12} + 4096$
- :

$$\begin{aligned}
 &= x^{12} + 2^{12} \\
 &= (x^4 + 2^4)[(x^4)^2 - (x^4)(2^4) + (2^4)^2] \\
 &= (x^4 + 2^4)[x^8 - x^4 2^4 + 2^8] \\
 &= (x^4 + 16)[x^8 - 16x^4 + 256]
 \end{aligned}$$

Trinomios

Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Ejemplo 3.8.

1. Factorizar el trinomio
- $x^2 + 6x + 9$
- :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{x^2} & + & \underbrace{6x} & + & \underbrace{9} & = & (x+3)^2 \\
 x^2 & & 2(x)(3) & & 3^2 & &
 \end{array}$$

2. Factorizar el trinomio $4x^2 - 8x + 4$:

$$\underbrace{4x^2}_{(2x)^2} - \underbrace{8x}_{2(2x)(2)} + \underbrace{4}_{2^2} = (2x - 2)^2 = 4(x - 1)^2$$

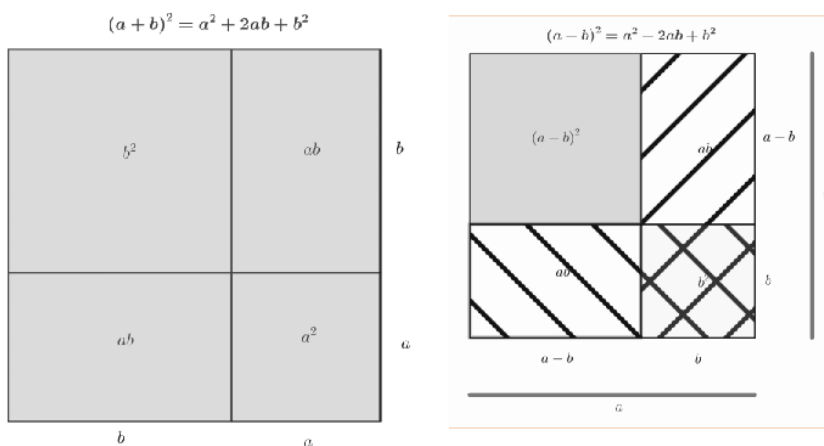


Figura 6. Interpretación geométrica de un trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

Completar un trinomio cuadrado perfecto

Algunos trinomios no cumplen las condiciones para ser trinomios cuadrados perfectos; por ejemplo, podemos encontrar trinomios cuyo primer y tercer término tienen raíz cuadrada perfecta, pero el término de la mitad no es el doble producto de las dos raíces. En este caso, se suma (y se resta para no alterar la expresión original) el término que hace falta para formar un trinomio cuadrado perfecto, así tendremos un trinomio cuadrado perfecto y una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 3.9.

1. Factorizar $x^4 + 4x^2 + 16$:

$$x^4 + 4x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2$$

Sumamos y restamos la expresión $4x^2$.

$$= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto.

$$= (x^2 + 4 - 2x)(x^2 + 4 + 2x)$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$$

Ordenamos los términos dentro de los paréntesis.

Trinomio cuadrado de la forma: $[]^2 + b[] + c$

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

Donde $m + n = b$ y $m \cdot n = c$

Ejemplo 3.10.

1. Factorizar el trinomio $x^2 + 12x - 45$:

$$x^2 + 12x - 45 = (x - 3)(x + 15)$$

A través de la descomposición de factores del término independiente³, encontramos los valores: -3 y 15, tales que:

$$(-3)(15) = -45$$

$$(-3) + (15) = 12$$

³ $45 = (3 \times 3)(5) = (3 \times 5)(3) = (15)(3)$

2. Factorizar el trinomio $9x^2 - 12x - 12$:

$$\begin{aligned}
 9x^2 - 12x - 12 &= (3x)^2 - 4(3x) - 12 \\
 &= (3x+2)(3x-6) \\
 &= 3(3x+2)(x-2)
 \end{aligned}$$

Reescribimos el polinomio de la forma: $[\quad]^2 + b[\quad] + c$

A través de la descomposición de factores del término independiente⁴, encontramos los valores: 2 y -6, tales que:

$$(2)(-6) = -12$$

$$(2) + (-6) = -4$$

Factorizamos el factor común dentro del paréntesis.

Trinomio de la forma: $a[\quad]^2 + b[\quad] + c$

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} \\
 &= \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} \\
 &= \frac{(ax+m)(ax+n)}{a}
 \end{aligned}$$

En el que $m+n=b$ y $m \cdot n=ac$

De la última expresión, se saca factor común de cada factor y luego se simplifica con el denominador.

⁴ $12 = 2^2 \times 3 = (2 \times 3)(2) = (6)(3)$

Ejemplo 3.11.

1. Factorizar el trinomio $40x^2 + 94x - 15$:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{40(40x^2 + 94x - 15)}{40} \\
 &= \frac{(40x)^2 + 94(40x) - 600}{40} \\
 &= \frac{(40x + 100)(40x - 6)}{40} \\
 &= \frac{20(2x + 5)2(20x - 3)}{40} \\
 &= \frac{40(2x + 5)(20x - 3)}{40} \\
 &= (2x + 5)(20x - 3)
 \end{aligned}$$

Multiplicamos y dividimos por el coeficiente de x^2 , en este caso el número 40.

Reescribimos el numerador en un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

A través de la descomposición de factores del término independiente⁵ encontramos los valores: 100 y -6, tales que:

$$(100)(-6) = -600$$

$$(100) + (-6) = 94$$

Factorizamos el factor común en cada paréntesis.

Multiplicamos y simplificamos con el denominador.

2. Factorizar el trinomio $5 + 7x^4 - 6x^8$:

$$\begin{aligned}
 &= -[6(x^4)^2 - 7x^4 - 5] \\
 &= \frac{6[6(x^4)^2 - 7x^4 - 5]}{6} \\
 &= \frac{(6x^4)^2 - 7(6x^4) - 30}{6} \\
 &= -\frac{(6x^4 - 10)(6x^4 + 3)}{6} \\
 &= -\frac{2(3x^4 - 5)3(2x^4 + 1)}{6}
 \end{aligned}$$

Factorizamos el signo y reescribimos el polinomio de la forma: $a[\]^2 + b[\] + c$.

Multiplicamos y dividimos por el coeficiente de $(x^4)^2$, en este caso el número 6.

Reescribimos el numerador en un polinomio de la forma $[\]^2 + b[\] + c$.

A través de la descomposición de factores del término independiente⁶ encontramos los valores: -10 y 3, tales que:

$$(-10)(3) = -30$$

$$(-10) + (3) = -7$$

⁵ $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 = (2^3 \times 5^2)(2 \times 3) = (100)(6)$

⁶ $30 = 2 \times 3 \times 5 = (2 \times 5)(3) = (10)(3)$

$$= - \frac{6(3x^4 - 5)(2x^4 + 1)}{6}$$

$$= - \frac{\cancel{6}(3x^4 - 5)(2x^4 + 1)}{\cancel{6}}$$

$$= (5 - 3x^4)(2x^4 + 1)$$

Factorizamos el factor común en cada paréntesis.

Multiplicamos y simplificamos con el denominador.

Multiplicamos uno de los paréntesis por el signo que habíamos factorizado en el primer paso.

Este procedimiento para factorizar trinomios no es la única forma, el lector puede consultar el artículo *Geometría como instrumento del álgebra* (Samper de Caicedo, 1996), en el cual se expuso una forma de generalizar todos estos casos.

Ejercicios propuestos sobre los casos de factorización

Factorice completamente cada expresión teniendo en cuenta el caso de factorización respectivo:

3.1. Factor común:

a) $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4 =$

() ()

b) $63a^3x^2y - 42a^2x^3y^2 - 105a^2x =$

() ()

c) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2 =$

() ()

d) $6ax + 3a + 1 + 2x =$

() ()

e) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx =$

() ()

3.2. Diferencia de cuadrados:

a) $100 - 4x^6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$

b) $4x^2 - 81 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$

c) $196 - 225x^{12} = (\quad - \quad)(\quad + \quad)$

d) $256x^{12} - 289 = (\quad - \quad)(\quad + \quad)$

e) $\frac{x^6}{49} - \frac{4}{121} = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$

3.3. Diferencia de cuadrados:

a) $x^3 + 1 = (\quad)(\quad)$

b) $27 - x^3 = (\quad)(\quad)$

c) $512 + 27x^9 = (\quad)(\quad)$

d) $216 - x^{12} = (\quad)(\quad)$

e) $343 + 64x^9 = (\quad)(\quad)$

3.4. Suma o diferencia de potencias iguales:

a) $81 - x^4 = (\quad)(\quad)$

b) $32x^5 + 1 = (\quad)(\quad)$

c) $729x^6 - 64 = (\quad)(\quad)$

d) $x^8 - 256 = (\quad)(\quad)$

e) $x^9 + 19683 = (\quad)(\quad)$

3.5. Trinomio cuadrado perfecto:

a) $x^2 - 10x + 25 = (\quad)^2$

b) $9 - 6x + x^2 = (\quad)^2$

c) $36 + 12x^2 + x^4 = (\quad)^2$

d) $400x^{10} + 40x^5 + 1 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})^2$

e) $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3} = (\rule{1.5cm}{0.4pt})^2$

3.6. Trinomio de la forma $a[\rule{0.5cm}{0.4pt}]^2 + b[\rule{0.5cm}{0.4pt}] + c$

a) $x^2 + 5x - 14 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})(\rule{1.5cm}{0.4pt})$

b) $x^2 + 13x - 30 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})(\rule{1.5cm}{0.4pt})$

c) $x^2 - 20x - 300 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})(\rule{1.5cm}{0.4pt})$

d) $x^2 + 43x + 432 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})(\rule{1.5cm}{0.4pt})$

e) $(4)x^2 - 2(4x) - 15 = (\rule{1.5cm}{0.4pt})(\rule{1.5cm}{0.4pt})$

3.7. Trinomio de la forma $a[\rule{0.5cm}{0.4pt}]^2 + b[\rule{0.5cm}{0.4pt}] + c$ (complete el procedimiento: re escriba, factorice, simplifique):

a) $3x^2 + 5x - 2 =$

$((\rule{1cm}{0.4pt})^2 (\rule{1cm}{0.4pt}) \rule{1cm}{0.4pt}) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = ((\rule{1cm}{0.4pt})$
 $(\rule{1cm}{0.4pt})) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = (\rule{1cm}{0.4pt})(\rule{1cm}{0.4pt})$

b) $5x^2 + 13x - 6 =$

$((\rule{1cm}{0.4pt})^2 (\rule{1cm}{0.4pt}) \rule{1cm}{0.4pt}) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = ((\rule{1cm}{0.4pt})$
 $(\rule{1cm}{0.4pt})) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = (\rule{1cm}{0.4pt})(\rule{1cm}{0.4pt})$

c) $20x^2 + x - 1 =$

$((\rule{1cm}{0.4pt})^2 (\rule{1cm}{0.4pt}) \rule{1cm}{0.4pt}) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = ((\rule{1cm}{0.4pt})$
 $(\rule{1cm}{0.4pt})) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = (\rule{1cm}{0.4pt})(\rule{1cm}{0.4pt})$

d) $9x^2 + 10x + 1 =$

$((\rule{1cm}{0.4pt})^2 (\rule{1cm}{0.4pt}) \rule{1cm}{0.4pt}) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = ((\rule{1cm}{0.4pt})$
 $(\rule{1cm}{0.4pt})) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = (\rule{1cm}{0.4pt})(\rule{1cm}{0.4pt})$

e) $6x^4 + 5x^2 - 6 =$

$((\rule{1cm}{0.4pt})^2 (\rule{1cm}{0.4pt}) \rule{1cm}{0.4pt}) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = ((\rule{1cm}{0.4pt})$
 $(\rule{1cm}{0.4pt})) / (\rule{1cm}{0.4pt}) = (\rule{1cm}{0.4pt})(\rule{1cm}{0.4pt})$

Capítulo 4. Ecuaciones

En este capítulo, haremos uso de las propiedades de los inversos y los neutros de las operaciones básicas de adición y multiplicación de los números reales, las cuales se revisaron en el primer capítulo, para resolver ecuaciones lineales. Usaremos también la factorización de polinomios, estudiada en el capítulo cinco, para resolver ecuaciones cuadráticas. Finalmente, usaremos las propiedades de exponentes y logaritmos para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Todos estos tipos de ecuaciones son de gran utilidad para plantear y resolver problemas de aplicación que involucran este tipo de expresiones.

Una ecuación se caracteriza por ser una *igualdad* entre dos expresiones que contiene una o más *incógnitas*. Resolver una ecuación implica encontrar justamente el valor de la incógnita que satisface la igualdad. A continuación, veremos el proceso para solucionar cuatro clases diferentes de ecuaciones con una sola incógnita en el conjunto de los números reales: *lineal* ($bx+c=0$), *cuadrática* ($ax^2+bx+c=0$), *exponencial* $a^x=b$ y *logarítmica* $\log_a x=b$.

Ecuación lineal

En este tipo de ecuaciones, la incógnita $x \in \mathbb{R}$ y su mayor exponente es 1; a continuación, veremos los principales pasos a tener en cuenta para despejar la incógnita en una ecuación de este tipo:

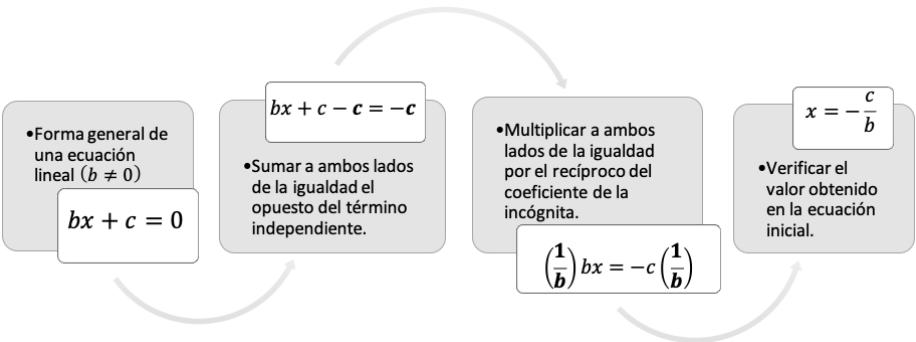


Figura 7. Proceso para resolver una ecuación lineal en su forma general con $b, c, x \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.1.

Resolver la siguiente ecuación lineal

$$\frac{7+2(x+1)}{3} = \frac{6x}{5}$$

Solución:

Observe que la ecuación se considera lineal porque el exponente de la incógnita es 1; además, si se simplifican las expresiones algebraicas al reunir términos semejantes podemos llevarla a la forma general descrita anteriormente:

$$\frac{7+2x+2}{3} = \frac{6x}{5}$$

$$\frac{9+2x}{3} = \frac{6x}{5}$$

$$(5)(9+2x) = 6x(3)$$

$$45+10x = 18x$$

$$10x - 18x = -45$$

$$-8x = -45$$

$$x = \frac{-45}{-8} = \frac{45}{8}$$

$$\frac{7+2\left(\frac{45}{8}+1\right)}{3} = \frac{6\left(\frac{45}{8}\right)}{5}$$

$$\frac{27}{4} = \frac{27}{4}$$

Aplicamos propiedad distributiva en el numerador del lado izquierdo de la igualdad para romper el paréntesis.

Sumamos términos semejantes.

Multiplicamos a ambos lados de la igualdad por los recíprocos de los denominadores.

Aplicamos propiedad distributiva en el numerador para romper el paréntesis.

Reunimos términos semejantes a cada lado de la igualdad.

Sumamos términos semejantes.

Multiplicamos a ambos lados de la igualdad por el recíproco del coeficiente de la incógnita

Verificamos que la solución obtenida satisfaga la igualdad en la ecuación inicial.

En la solución de una ecuación se pueden presentar casos como los que se muestran en los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 4.2.

$$12x+8=4(3x+2)$$

$$12x+8=12x+8$$

$$12x-12x=8-8$$

$$0=0$$

En este caso, la igualdad se cumple para todo valor de $x \in \mathbb{R}$; por lo tanto, *tiene infinitas soluciones*.

Ejemplo 4.3.

$$\begin{aligned} 12x+8 &= 4(3x-2) \\ 12x+8 &= 12x-8 \\ 12x-12x &= -8-8 \\ 0 &= -16 \end{aligned}$$

En este caso, la igualdad no se cumple para ningún valor de $x \in \mathbb{R}$; por lo tanto, *no tiene solución*

Ecuación cuadrática

En este tipo de ecuaciones, la incógnita $x \in \mathbb{R}$ y su mayor exponente es 2; a continuación, veremos los principales aspectos a tener en cuenta para despejar la incógnita en una ecuación de este tipo:

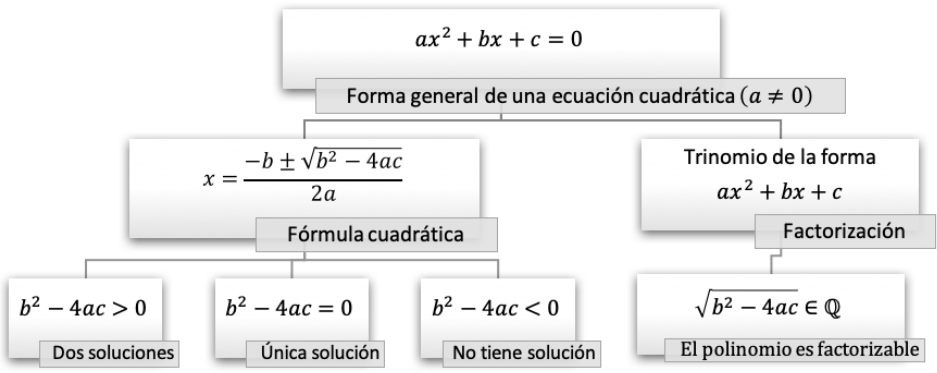


Figura 8. Proceso para resolver una ecuación cuadrática en su forma general con $a, b, c, x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.4.

Resolver la siguiente ecuación cuadrática

$$2x-3x^2=-8$$

Solución

Por fórmula cuadrática identificamos los coeficientes: $a=-3, b=2, c=8$ y aplicamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-3)(8)}}{2(-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{-6} = \frac{-2 \pm 10}{-6}$$

Por lo tanto, obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2+10}{-6} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2-10}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Con el fin de comparar ambas estrategias, veamos a continuación cómo esta misma ecuación se puede resolver por factorización:

$$-3x^2 + 2x + 8 = 0$$

Ordenamos los términos de la ecuación cuadrática e igualamos a cero para llevarla a la forma general.

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por -1 .

$$\frac{(3x)^2 - 2(3x) - 24}{3} = 0$$

Reescribimos el polinomio en uno de la forma $x^2 + bx + c$.

$$\frac{(3x-6)(3x+4)}{3} = 0$$

Factorizamos para buscar dos números que multiplicados den -24 y sumados den -2 .

$$\frac{3(x-2)(3x+4)}{3} = 0$$

Sacamos el factor común del primer paréntesis.

$$(x-2)(3x+4) = 0$$

Cancelamos el factor común con el denominador.

En esta última ecuación, para que el producto de estos dos factores sea cero alguno de ellos debe ser cero, es decir:

$$x-2=0 \implies \boxed{x=2}$$

$$3x+4=0 \implies \boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

Verificamos que ambas soluciones satisfagan la igualdad en la ecuación inicial:

$$8 + 2(2) - 3(2)^2 = 0$$

$$8 + 4 - 3(4) = 0$$

$$12 - 12 = 0$$

$$0 = 0$$

$$8 + 2\left(-\frac{4}{3}\right) - 3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

$$8 - \frac{8}{3} - 3\left(\frac{16}{9}\right) = 0$$

$$\frac{24 - 8 - 16}{3} = 0$$

$$\frac{24 - 24}{3} = 0$$

$$0 = 0$$

En la práctica, algunas ecuaciones cuadráticas se resuelven más fácil usando algún caso de factorización, por ejemplo: $x^2 - 4 = 0$ o $x^2 - 2x = 0$. Hay otras ecuaciones que necesariamente se deben resolver usando la fórmula cuadrática, en caso de que el polinomio no sea factorizable en los racionales; por ejemplo: $x^2 + 5x + 3 = 0$ tiene dos soluciones que corresponden a números irracionales o $x^2 + 3x + 4 = 0$, que no tiene solución en los números reales (se debe verificar).

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En una ecuación exponencial la incógnita $x \in \mathbb{R}$ se encuentra en el exponente; por lo tanto, para despejarla es necesario pasar la ecuación a la forma logarítmica o aplicar a ambos lados de la ecuación el logaritmo que esté en la misma base, esto con el fin de cancelar el logaritmo y la base de la exponencial, como se vio en la propiedad 9 de logaritmos (véase la tabla 11). De forma análoga, en una ecuación logarítmica, la incógnita $x \in \mathbb{R}, x > 0$ se encuentra en el argumento del logaritmo; por lo tanto, para despejarla es necesario pasar la ecuación a la forma exponencial o aplicar a ambos lados de la ecuación una exponencial que tenga la misma base del logaritmo, nuevamente con el fin de cancelar el logaritmo y la base de la exponencial, como se vio en la propiedad 10 de logaritmos (véase la tabla 11).

Forma exponencial

Forma logarítmica

$$a^n = b \quad \longleftrightarrow \quad \log_a b = n$$

Ejemplo 4.5.

Para resolver la siguiente ecuación:

$$3^x = 5$$

Podemos pasar a la forma logarítmica para despejar la incógnita:

$$\log_3 5 = x$$

Luego,

$$x \approx 1.4649$$

Ejemplo 4.6.

Para resolver la siguiente ecuación:

$$\log_2 x = 8$$

Podemos pasar a la forma exponencial para despejar la incógnita:

$$2^8 = x$$

Luego,

$$x = 256$$

Veamos otros ejemplos en los que se aplican las propiedades de logaritmos en la solución:

Ejemplo 4.7.

Resolver la siguiente ecuación:

$$2^{x+4} = 2^{1-3x}$$

Solución

$$\log_2(2^{x+4}) = \log_2(2^{1-3x})$$

$$x+4 = 1-3x$$

$$x+3x = 1-4$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4} \quad x = -0.75$$

Como la base es la misma, aplicamos logaritmo en base 2 a ambos lados de la igualdad con el fin de cancelar la forma exponencial, de acuerdo con la propiedad 9 de logaritmos (tabla 11).

Reunimos términos semejantes.

Simplificamos y despejamos la incógnita.

Solución (recuerde probar la respuesta en la ecuación inicial).

Ejemplo 4.8.

Resolver la siguiente ecuación:

$$3^{x+4} = 2^{1-3x}$$

Solución

$$\ln(3^{x+4}) = \ln(2^{1-3x})$$

$$(x+4) \ln(3) = (1-3x) \ln(2)$$

$$x \ln(3) + 4 \ln(3) = \ln(2) - 3x \ln(2)$$

$$x \ln(3) + 3x \ln(2) = \ln(2) - 4 \ln(3)$$

$$x (\ln(3) + 3 \ln(2)) = \ln(2) - 4 \ln(3)$$

$$x = \frac{\ln(2) - 4 \ln(3)}{\ln(3) + 3 \ln(2)} \approx -1,1646$$

Como la base es distinta, aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la igualdad.

Propiedad 5 de logaritmos (tabla 11).

Propiedad distributiva (tabla 2).

Reunimos términos semejantes.

Factor común y despejamos la incógnita.

Solución (recuerde probar la respuesta en la ecuación inicial).

Ejemplo 4.9.

Resolver la siguiente ecuación:

$$e^{2x} - 2e^x = 15$$

Solución

$$(e^x)^2 - 2e^x = 15$$

Reescribimos el primer término como una potencia.

$$z^2 - 2z = 15$$

Hacemos el cambio de variable $z = e^x$.

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

Reescribimos como una ecuación cuadrática.

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

Resolvemos aplicando la fórmula cuadrática (véase figura 8).

$$z = 5 \text{ o } z = -3$$

Obtenemos dos soluciones para la ecuación cuadrática.

$$e^x = 5 \text{ o } e^x = -3$$

Volvemos a la variable original.

$$\ln(e^x) = \ln(5) \text{ o } \ln(e^x) = \ln(-3)$$

Propiedad 9 de logaritmos (tabla 11).

Observe que se descarta una ecuación dado que el logaritmo no está definido para valores negativos.

$$x = \ln 5 \approx 1,6094$$

Solución (recuerde probar la respuesta en la ecuación inicial).

Ejemplo 4.10.

Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(5x+1) = 2 + \log(2x-3)$$

Solución

$$\log(5x+1) - \log(2x-3) = 2$$

$$\log\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right) = 2$$

$$10^{\log\left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)} = 10^2$$

$$\frac{5x+1}{2x-3} = 100$$

$$5x+1 = 100(2x-3)$$

$$5x-200x = -300-1$$

$$x = \frac{-301}{-195} \approx 1,5436$$

Reunimos todos los logaritmos a un lado de la ecuación.

Propiedad 4 de logaritmos (tabla 11).

Aplicamos base 10 a ambos lados de la ecuación para cancelar el logaritmo.

Propiedad 10 de logaritmos (tabla 11).

Pasamos a multiplicar el denominador.

Distribuimos y reunimos términos semejantes.

Solución (recuerde probar la respuesta en la ecuación inicial).

Ejercicios propuestos sobre resolución de ecuaciones

4.1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales. Si la solución existe, verifique su respuesta:

a) $x+9x=90$, $x=$ _____

b) $-2x+1=3$, $x=$ _____

c) $2(3x-2) - (x-3)=8$, $x=$ _____

d) $x-1-\frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3}=0$, $x=$ _____

e) $\frac{1}{6}(a+8) = \frac{3-2a}{4} + 2a - \frac{73}{12}$, $a=$ _____

f) $21-7x=41x-123$, $x=$ _____

g) $\frac{3m-11}{20} - \frac{5m-1}{14} = \frac{m-7}{10} - \frac{5m-6}{21}$, $m=$ _____

h) $\frac{2t}{15} - \frac{3t-5}{20} = \frac{t}{5} - 3$, $t=$ _____

i) $5(20-x)=4(2x-1)$, $x=$ _____

j) $\frac{z-1}{3} - \frac{z+3}{2} = 5z$, $z=$ _____

4.2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas. Si la solución existe, verifique su respuesta:

a) $4x^2+x-14=0$, $x=$ _____

b) $x(3x+10)=77$, $x=$ _____

c) $15x^2-12=-8x$, $x=$ _____

d) $12x^2+60x+75=0$, $x=$ _____

e) $\frac{5x}{x^2-96} = -1$, $x=$ _____

f) $x^2=169$, $x=$ _____

g) $9(x-1)^2=7$, $x=$ _____

h) $6x^2-x=2$, $x=$ _____

i) $3x^2+5x+1=0$, $x=$ _____

j) $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$, $x=$ _____

4.3. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Si la solución existe, verifique su respuesta:

a) $3^{4-x}=5$, $x=$ _____

b) $2^{2x-3}=5^{x-2}$, $x=$ _____

c) $8^{2x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 4^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$, $x=$ _____

d) $3^{(x^2)} = 7$, $x =$ _____

e) $e^x + 2 = 8e^{-x}$, $x =$ _____

f) $\log_8(x-5) = \frac{2}{3}$, $x =$ _____

g) $\log\sqrt{x} = \log(x-6)$, $x =$ _____

h) $\log(x^2+4) - \log(x+2) = 2 + \log(x-2)$, $x =$ _____

i) $\log_4(x+1) = 2 + \log_4(3x-2)$, $x =$ _____

j) $\ln(x+2) = \ln e^{\ln 2} - \ln x$, $x =$ _____

- 4.4. Si el tanque de un Renault 4 se llena con 9 galones de gasolina que cuestan \$ 81 432 (COP), ¿cuánto costará llenar el tanque de una camioneta Renault Duster que tiene 13.2 galones de capacidad? (Ospina, 2016).

- 4.5. Un arquitecto quiere diseñar un edificio que tenga una base de $240 m^2$ de área. Los ambientalistas le dicen que debido a las dimensiones y la altura del edificio debe dejar una zona verde uniforme de 10 m de ancho alrededor del edificio. Si el arquitecto debe comprar un terreno rectangular de largo el doble del ancho, ¿qué dimensiones debe tener el terreno para poder cumplir con la norma ambientalista y construir el edificio con la misma área de base planeada? (Ospina, 2016, p. 138).

- 4.6. La ecuación $A=P(1.1)^t$ da el valor A al final de t años de una inversión de P dólares compuesta anualmente a una tasa de interés de 10%. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que una inversión se duplique? Proporcione su respuesta al año más cercano (Haeussler, 2003, p. 215).

Capítulo 5. Trigonometría básica

Este último capítulo se presenta de manera opcional para los programas académicos de las facultades de Ciencias Sociales y Empresariales, Arquitectura y Psicología. No obstante, dadas las variadas aplicaciones que tienen las funciones trigonométricas en el área de las ciencias naturales y la ingeniería, se recomienda abordar como un suministro para los diferentes programas de ingeniería. Presentaremos los conceptos básicos de trigonometría en relación a ángulos, funciones trigonométricas e identidades básicas que le permitan al estudiante recordar algunas de las aplicaciones estudiadas en su formación secundaria.

La *trigonometría* es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos. Las *funciones trigonométricas* (*seno*, *coseno*, *tangente*, etc.) están asociadas a los ángulos, denominadas también *funciones circulares*, dado que se definen sobre la circunferencia unitaria. A continuación, abordaremos algunos conceptos básicos sobre la medida de ángulos, introduciremos las funciones trigonométricas mediante el uso de las razones entre lados de un triángulo rectángulo y finalizaremos con la presentación de algunas identidades trigonométricas.

Ángulos

Un *ángulo* se define como el conjunto de todos los puntos determinados por dos semirrectas (*lados*) que tienen el mismo punto extremo (*vértice*). Decimos que un ángulo está en *posición estándar* sobre el plano cartesiano xy si el lado inicial está sobre el semieje x positivo. También, si el lado final en cualquiera de los cuatro cuadrantes y el vértice coinciden con el origen del sistema coordenado $(0,0)$.

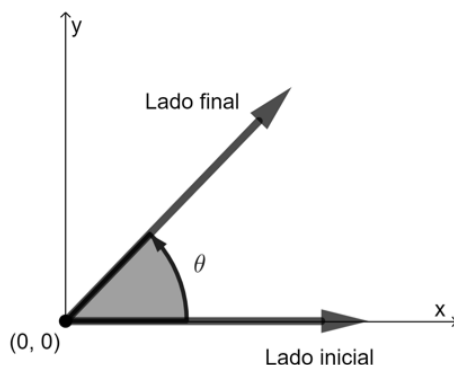


Figura 9. Ángulo positivo en posición estándar.

Un *ángulo es positivo* si es medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj (figura 9) y si se mide en el mismo sentido de las manecillas del reloj es un *ángulo negativo* (figura 10).

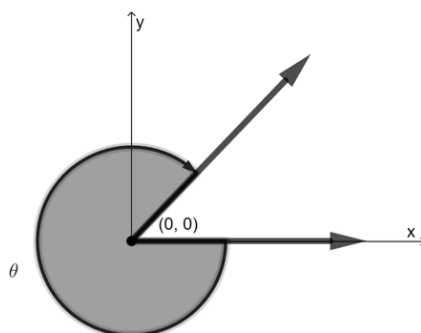


Figura 10. Ángulo negativo en posición estándar.

Los ángulos se pueden medir en *grados* ($^{\circ}$) o en *radianes* (rad). La rotación del lado final del ángulo da una vuelta completa (en el sentido positivo) hasta coincidir con el lado inicial nuevamente, lo que corresponde a 360° . Por lo tanto, un *grado* 1° equivale a $\frac{1}{360}$ parte de esta rotación; a su vez 1° se subdivide en 60 minutos ($'$) y cada minuto en 60 segundos ($''$). Por otro lado, un *radián* es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo. En un círculo de radio r , la longitud de la circunferencia (perímetro del círculo) equivale a $2\pi r$ rad. Por lo tanto, en una circunferencia unitaria (de radio $r=1$) se tiene la siguiente equivalencia (figura 11):

$$180^{\circ} = \pi \text{ rad}$$

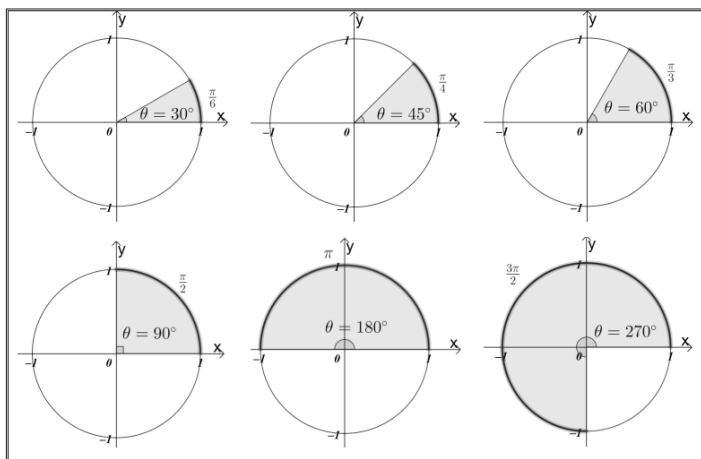


Figura 11. Relación de la medida de un ángulo en grados y radianes sobre una circunferencia unitaria.

Razones trigonométricas

Si uno de los ángulos de un triángulo es un ángulo recto (90°), decimos que es un triángulo rectángulo. Los dos lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* (figura 12). El *Teorema de Pitágoras* establece la siguiente relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto Adyacente})^2 + (\text{Cateto Opuesto})^2$$

Si θ es cualquiera de los ángulos agudos del triángulo rectángulo, como en la figura 12, se establecen 6 razones entre los lados del triángulo rectángulo, como se expone en la tabla 13:

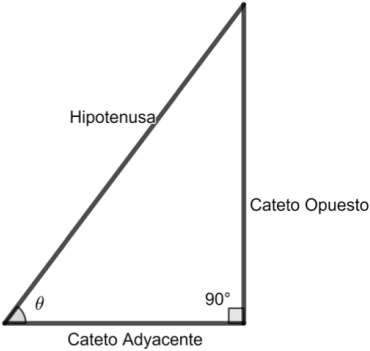


Figura 12. Componentes de un triángulo rectángulo.

Tabla 13. Razones trigonométricas.

Razones trigonométricas básicas	Razones trigonométricas recíprocas
$\sin \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\csc \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$
$\cos \theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\sec \theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$
$\tan \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$	$\cot \theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$

Ejemplo 5.1.

Si θ es un ángulo agudo y $\tan\theta = \frac{4}{3}$, encuentre los valores de las otras 5 razones trigonométricas de θ .

Solución

Comenzamos haciendo el bosquejo de un triángulo rectángulo con los datos dados (figura 13):

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

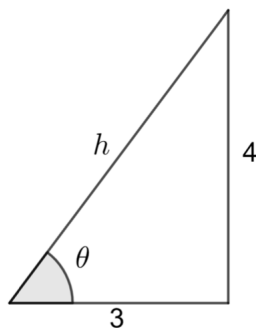


Figura 13. Triángulo del ejemplo 5.1.

Haciendo uso del Teorema de Pitágoras podemos hallar el valor de la hipotenusa:

$$h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

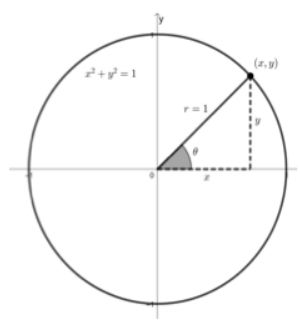
$$h = \sqrt{25} = 5$$

En consecuencia, las otras razones están dadas por lo siguiente:

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \quad \cos\theta = \frac{3}{5} \quad \csc\theta = \frac{5}{4} \quad \sec\theta = \frac{5}{3} \quad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

Si (x,y) es un punto sobre la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$ y θ , el respectivo ángulo central subtendido, como se ilustra en la figura 14, con base en el triángulo rectángulo inscrito que se forma y las razones trigonométricas, se definen las *funciones trigonométricas*:

$$\cos\theta=x \quad \text{y} \quad \sin\theta=y$$



$$\cos \theta = x$$

$$\sin \theta = y$$

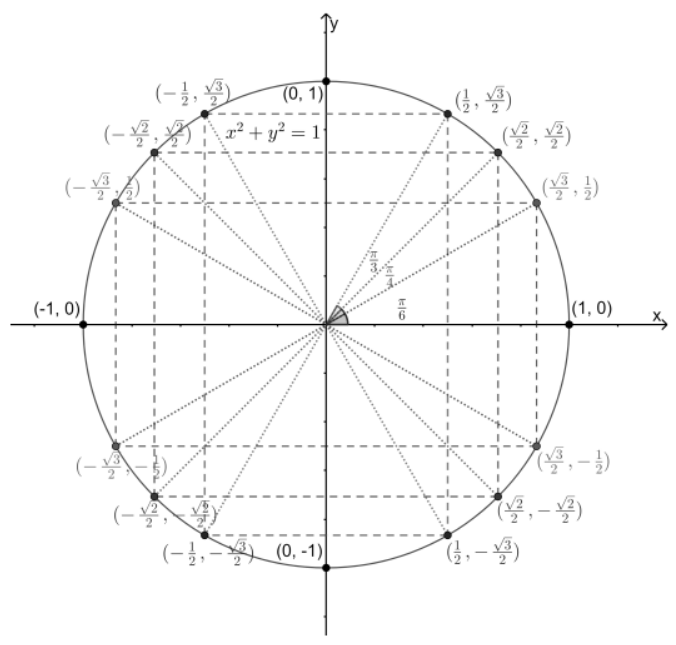


Figura 14. Valores de las funciones trigonométricas seno y coseno en los ángulos notables sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

En la tabla 7 se ilustra la definición de las otras funciones trigonométricas y los valores respectivos que se tienen en cuenta para algunos ángulos notables o característicos. Con base en la figura 14 complete los valores que hacen falta:

Tabla 14. Funciones trigonométricas en ángulos notables.

Ángulo		$\cos\theta$	$\sen\theta$	$\tan\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$	$\cot\theta$
Gra	Rad	x	y	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{x}{y}$
0° 360°	0 2π	1	0	0	1	NE	
30°			$\frac{1}{2}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2		$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1			1	0
	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-2		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1		$\sqrt{2}$	0
150°		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\sqrt{3}$
180°	π	-1		0	-1	NE	NE
210°		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		$-\sqrt{2}$	1
	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-2		
	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	NE		-1	
300°	$\frac{5\pi}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	2		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$			-2	$-\sqrt{3}$

Identidades trigonométricas

A diferencia de una ecuación, en la cual la igualdad se satisface para algunos valores específicos de la incógnita, en el caso de una *identidad*, la igualdad se satisface para cualquier valor de la variable. En la tabla 15, se presentan algunas identidades que se satisfacen para cualquier ángulo $\theta \in \mathbb{R}$:

Tabla 15. Identidades trigonométricas.

Nombre	Identidad					
Identidades básicas y recíprocas	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
Identidades pitagóricas	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$		$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$		$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	
Identidades de suma y resta de ángulos	$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \cos \beta \cos(\alpha \pm \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$					
Identidades de ángulo doble	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2 \theta}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2 \theta}{2}$	$\sin 2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\tan 2 \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$		

Ejercicios propuestos sobre trigonometría básica

5.1. Convierta de grados a radianes:

a) $210^\circ =$ _____

b) $300^\circ =$ _____

c) $-315^\circ =$ _____

d) $36^\circ =$ _____

e) $9^\circ =$ _____

f) $-185^\circ =$ _____

5.2. Convierta de radianes a grados:

a) $4\pi =$ _____

b) $-\frac{7\pi}{2} =$ _____

c) $-\frac{5\pi}{12} =$ _____

d) $\frac{8\pi}{3} =$ _____

e) $\frac{4\pi}{5} =$ _____

f) $-\frac{3\pi}{8} =$ _____

5.3. Encuentre el valor exacto de cada función trigonométrica (si existe) para el ángulo cuya medida en radianes está dada (utilice como ayuda la tabla 7):

a) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$ _____

d) $\sec\left(\frac{11\pi}{4}\right) =$ _____

b) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) =$ _____

e) $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$ _____

c) $\tan(-5\pi) =$ _____

f) $\cot\left(-\frac{8\pi}{3}\right) =$ _____

5.4. Dadas las siguientes condiciones, encuentre las funciones trigonométricas restantes:

- a) $\sin \theta = \frac{3}{5}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos \theta =$ _____

$\tan \theta =$ _____

$\sec \theta =$ _____

$\csc \theta =$ _____

$\cot \theta =$ _____
- b) $\sec \theta = -\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos \theta =$ _____

$\tan \theta =$ _____

$\sin \theta =$ _____

$\csc \theta =$ _____

$\cot \theta =$ _____
- c) $\tan \theta = 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos \theta =$ _____

$\sin \theta =$ _____

$\sec \theta =$ _____

$\csc \theta =$ _____

$\cot \theta =$ _____
- d) $\cos \theta = -\frac{1}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin \theta =$ _____

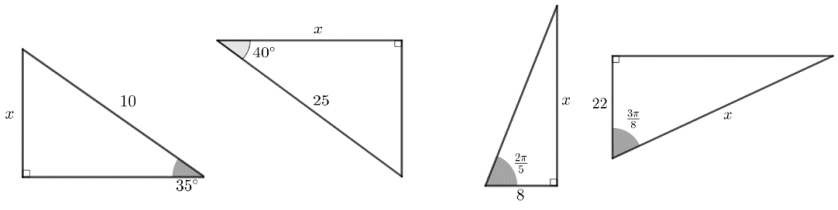
$\tan \theta =$ _____

$\sec \theta =$ _____

$\csc \theta =$ _____

$\cot \theta =$ _____

5.5. Encuentre la longitud del lado marcado con x y aproxime su respuesta a cinco cifras decimales (Stewart, 2008, p. A32):

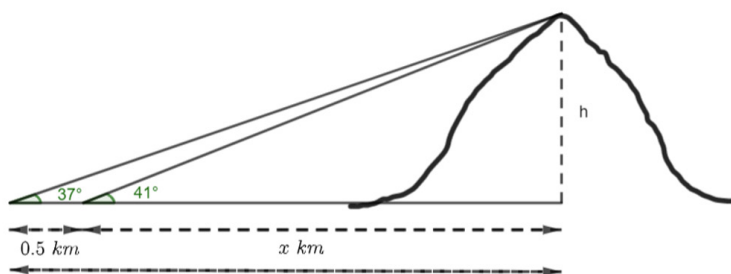


- a) $x =$ _____

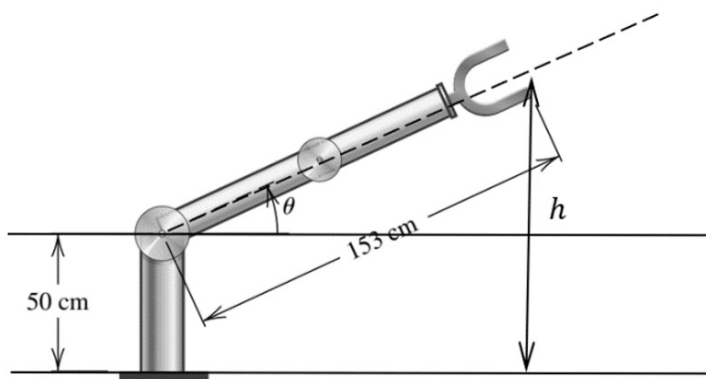
b) $x =$ _____
- c) $x =$ _____

d) $x =$ _____

- 5.6. Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de la montaña. En un punto se mide un ángulo de elevación de 41° . Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37° . ¿Qué altura tiene la montaña? (Ospina, 2016, p. 448).



- 5.7. Las funciones trigonométricas se usan extensamente en el diseño de robots industriales. Suponga que la articulación del hombro de un robot está motorizada, de modo que el ángulo θ aumenta a una razón constante de $\frac{\pi}{12}$ radianes por segundo a partir de un ángulo inicial de $\theta=0$. Suponga que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se ve en la siguiente figura (Swokowski, 2008, p. 447):



a) Complete la siguiente tabla que indica el ángulo θ y la altura h de la mano robótica cada segundo:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
h	50						

b) De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿se puede establecer que un aumento constante en el ángulo θ produce un aumento constante en la altura h de la mano?

Respuestas a los ejercicios propuestos

Ejercicios propuestos sobre operaciones y propiedades con números reales:

1.11.

a) V c) F e) F g) F i) F

b) F d) V f) V h) V j) F

1.12.

a) $\frac{3}{7} [>] \frac{3}{9}$ b) $\frac{2}{5} [<] \frac{6}{5}$ c) $\frac{7}{9} [<] \frac{5}{3}$ d) $\frac{21}{7} [=] \frac{-6}{-2}$ e) $-\frac{4}{5} [<] -\frac{1}{2}$

1.13.

a) 3.25 b) $1.2\bar{6}$ c) $0.\overline{36}$ d) $2.0\bar{6}$ e) 5.375

1.14.

a) $-\frac{4}{25}$ b) $\frac{32}{9}$ c) $\frac{33}{8}$ d) $\frac{475}{1111}$ e) $\frac{71759}{330}$

1.15.

a) 11 c) -27 e) -24 g) 12

b) 2 d) -92 f) 16 h) 2

1.16.

a) $\frac{1}{6}$ c) $1\frac{1}{12}$ e) $3\frac{1}{2}$ g) 2 i) $-\frac{59}{315}$

b) $6\frac{5}{12}$ d) $\frac{6}{7}$ f) 1 h) $-\frac{25}{18}$ j) $2\frac{8}{105}$

1.17. 75%

1.18. 17.14%

1.19. \$17380

1.20. \$65217.4, \$91304.3 y \$143478.3 respectivamente.

Ejercicios propuestos sobre potenciación, radicación, logaritmicación y propiedades:

2.1.

- | | | |
|-------------------|------------------|------------------------|
| a) $\frac{1}{9}$ | d) $\frac{1}{2}$ | g) $\frac{243}{32}$ |
| b) $\frac{25}{9}$ | e) 15 | h) $-\frac{2153}{975}$ |
| c) 21 | f) 6 | |

2.2.

- a) $7\sqrt{5}$
 b) $3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt{2}$
 c) $-3\sqrt[4]{5} - 4\sqrt[3]{3}$

2.3.

- | | | |
|------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| a) $4a^{(9/2)}$ | e) $\frac{y^2 z^9}{x^2}$ | i) $\frac{8y^8}{x^2}$ |
| b) $4a^2 b$ | f) $\frac{2}{3}$ | j) $\frac{x}{ab^{10} y^{(103)}}$ |
| c) $\frac{2x^2}{3z^3}$ | g) $a^4 b^2 c^4$ | |
| d) $2x^e$ | h) x | k) $4x^{(3/2)} y^{(9/2)}$ |

2.4.

- a) 9
 b) -1
 c) -3
 d) 4
 e) No existe

2.5.

- a) 1.07005
 b) -1.00915
 c) 0.85703
 d) -0.77134
 e) 2.90692

2.6.

- | | | | |
|-------------------|-------|-----------|-------|
| a) 4 | d) -1 | g) 0.6309 | j) -4 |
| b) $\frac{4}{5}$ | e) 3 | h) -2 | k) 2 |
| c) $-\frac{1}{2}$ | f) 5 | i) 4 | |

Ejercicios propuestos sobre los casos de factorización:

3.1.

- a) $12m^2 n(1+2mn-3m^2 n^2+4m^3 n^3)$
 b) $21a^2 x(3axy-2x^2 y^2-5)$
 c) $(x^2+y^2)(3ab-2)$
 d) $(2x+1)(3a+1)$
 e) $(ax-b)(4a^2-3m)$

3.2.

- a) $(10-2x^3)(10+2x^3)$
 b) $(2x-9)(2x+9)$
 c) $(14+15x^6)(14-15x^6)$
 d) $(16x^6+17)(16x^6-17)$
 e) $\left(\frac{x^3}{7}-\frac{2}{11}\right)\left(\frac{x^3}{7}+\frac{2}{11}\right)$

3.3.

- a) $(x+1)(x^2-x+1)$
 b) $(3-x)(9+3x+x^2)$
 c) $(8+3x^3)(64-24x^3+9x^6)$
 d) $(6-x^4)(36+6x^4+x^8)$
 e) $(7+4x^3)(49-28x^3+16x^6)$

3.4.

- a) $(3-x)(27+9x+3x^2+x^3)$
 $(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)$
 c) $(3x-2)(243x^5+162x^4-108x^3+72x^2-48x+32)$
 d) $(x-2)(x^7+2x^6+4x^5+8x^4+16x^3+32x^2+64x+128)$
 e) $(x+3)(x^8-3x^7+9x^6-27x^5+81x^4-243x^3+729x^2-2187x+6561)$

3.5.

- a) $(x-5)^2$
- b) $(3-x)^2$
- c) $(6+x^2)^2$
- d) $(20x^5+1)^2$
- e) $\left(\frac{1}{5}-\frac{5x^2}{6}\right)^2$

3.6.

- a) $(x-2)(x+7)$
- b) $(x-2)(x+15)$
- c) $(x+10)(x-30)$
- d) $(x+16)(x+27)$
- e) $(4x+3)(4x-5)$

3.7.

- a) $(3x+1)(x-2)$
- b) $(5x-2)(x+3)$
- c) $(5x-1)(4x+1)$
- d) $(9x+1)(x+1)$
- e) $(3x^2-2)(2x^2+3)$

Ejercicios propuestos sobre resolución de ecuaciones:

4.1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales. Si la solución existe, verifique su respuesta:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $x=9$ | d) $x=\frac{6}{5}$ | g) $m=-\frac{27}{29}$ | j) $z=-\frac{11}{31}$ |
| b) $x=-1$ | e) $a=5$ | h) $t=15$ | |
| c) $x=\frac{9}{5}$ | f) $x=3$ | i) $x=8$ | |

4.2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas. Si la solución existe, verifique su respuesta:

- a) $x=\frac{7}{4}, x=-2$
- b) $x=\frac{11}{3}, x=-7$
- c) $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{6}{5}$
- d) $x=-\frac{5}{2}$
- e) No tiene solución en los reales
- f) $x=13, x=-13$
- g) $x=1.88191\dots, x=0.11808\dots$
- h) $x=\frac{2}{3}, x=-\frac{1}{2}$
- i) $x=-0.2324\dots, x=-1.43425\dots$
- j) $x=-0.30277\dots, x=3.30277\dots$

4.3. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Si la solución existe, verifique su respuesta:

a) $x=2.53502\dots$

b) $x=5.10628\dots$

c) $x=11.52693\dots, x=0.00391\dots$

d) $x=1.33088\dots, x=-1.33088\dots$

e) $x=0.69314\dots$

f) $x=9$

g) $x=9$

h) $x=2.02010\dots$

i) $x=0.70212\dots$

j) $x=0.73205\dots$

4.4. $7.27 \approx 7$ años

4.5. \$ 119433.6 (COP)

4.6. Dimensiones del terreno rectangular: ancho = 27.05 m y largo = 54.1 m

Ejercicios propuestos sobre trigonometría básica:

5.1. a) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{5}$

b) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{20}$

c) $-\frac{7\pi}{4}$

5.2. a) 720° d) 480°

b) -630° e) $-67^\circ 30'$

c) 75°

5.3.

a) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

$\csc\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\sec\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

b) $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$

$\tan\left(\frac{9\pi}{2}\right) NE$

$\csc\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$

$\sec\left(\frac{9\pi}{2}\right) NE$

$\cot\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$

c) $\sin(-5\pi) = 0$

$\cos(-5\pi) = -1$

$\tan(-5\pi) = 0$

$\csc(-5\pi) NE$

$\sec(-5\pi) = -1$

$\cot(-5\pi) NE$

d) $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -1$

$\csc\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\sec\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\cot\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -1$

e) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

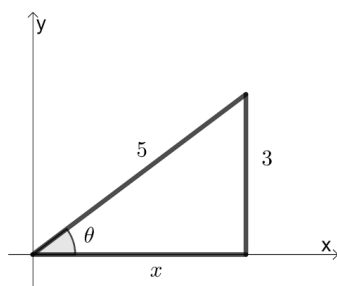
$\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -2$

$\sec\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

5.4.

a)



$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

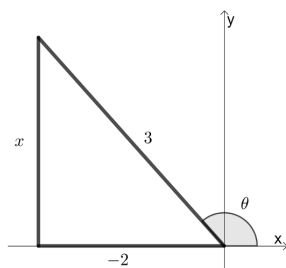
$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{5}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{5}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{4}{3}$$

b)



$$x = \sqrt{3^2 - (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

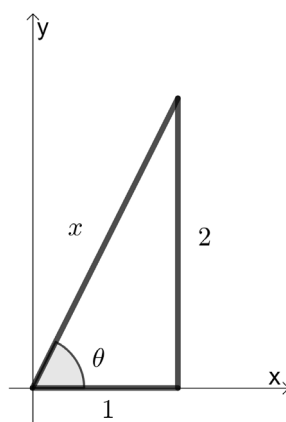
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\cot \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c)



$$x = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

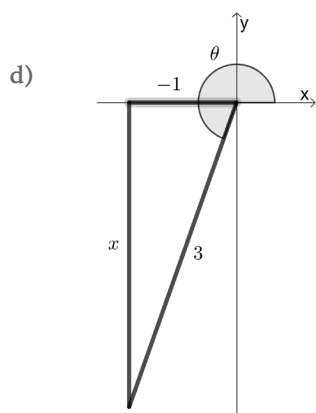
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec \theta = \sqrt{5}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{2}$$



$$x = \sqrt{3^2 - (-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = 2\sqrt{2}$$

$$\csc \theta = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\sec \theta = -3$$

$$\cot \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

5.5.

a) $x \approx 5.73576$

c) $x \approx 24.62145$

b) $x \approx 19.15111$

d) $x \approx 57.48877$

5.6.

$$x = \frac{0.5 \tan 37^\circ}{\tan 41^\circ - \tan 37^\circ} \approx 3.26 \text{ km}, h = x \tan 41^\circ \approx 2.83 \text{ km}$$



Referencias

Swokowski, E. W., y Cole, J. A. (2018). *Precálculo, álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Gengage Learning.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (1ªed.). S. Cervantes Gonzáles y G. Olguín Sarmiento, eds.) México: Cengage Learning Editores.

Haeussler, E. F., y Paul, R. S. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson educación.

Ospina Pulido, M. (2016). *Curso de matemáticas básicas: para ciencias, ciencias económicas e ingenierías* (Primera edición). Universidad Nacional de Colombia.

Samper de Caicedo, C. (1996, diciembre). Geometría como instrumento del álgebra. *Educación matemática*, 8(3), 86-94. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/3/10Samper.pdf>

