DISEÑO Y SIMULACIÓN DE PRÓTESIS DE PIE

CÓDIGO DE PROYECTO: PG-16-1-20

WEIMAR ALBERTO GUTIÉRREZ GARCÍA

CÓDIGO: 1010916
IDENTIFICACIÓN: C.C. 1022380483

UNIVERSIDAD PILOTO DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA
BOGOTÁ, D.C.
2017

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE PRÓTESIS DE PIE

WEIMAR ALBERTO GUTIÉRREZ GARCÍA

CÓDIGO: 1010916
IDENTIFICACIÓN: C.C. 1022380483

Proyecto de grado
Para obtener el título de:
Ingeniero Mecatrónico de la Universidad Piloto de Colombia

INGENIERO
Carlos Héctor González Villarraga
DIRECTOR Y DOCENTE

INGENIERO
Oscar Daniel Sánchez.
CO-DIRECTOR Y DOCENTE.

UNIVERSIDAD PILOTO DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA
BOGOTÁ, D.C.
2017

NOTA DE ACEPTACIÓN

Una vez realizada la revisión metodológica y técnica del documento final de proyecto de grado, doy constancia de que el (los) estudiante (s) ha cumplido a cabalidad con los objetivos propuestos, cumple a cabalidad con los Lineamientos de Opción de Grado vigentes del programa de Ingeniería Mecatrónica y con las leyes de derechos de autor de la República de Colombia, por tanto, se encuentra(n) preparado(s) para la defensa del mismo ante un jurado evaluador que considere idóneo el Comité de Investigaciones del Programa de Ingeniería Mecatrónica de la Universidad Piloto de Colombia.

Firma director

Firma co-director

Bogotá 14/08/2017

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN 5
1. GENERALIDADES 6
1.1 JUSTIFICACIÓN 6
1.2 OBJETIVOS 7
1.2.1. Objetivo general 7
1.2.2 Objetivos específicos 7
1.3 DELIMITACIONES DEL PROYECTO 7
1.3.1 Alcances y limitaciones 7
1.3.2 Línea de investigación del programa 7
1.4 MARCO REFERENCIAL 8
1.5 MARCO METODOLÓGICO 11
1.5.1 Metodología 11
2. MARCHA HUMANA 12
2.1 FASES DE LA MARCHA HUMANA 12
2.1.1 Fase de apoyo sencillo y doble 13
2.1.2 Fase oscilante 15
2.2 CENTRO DE GRAVEDAD 16
2.2.1 Línea de Centro de gravedad 16
2.3 PAPEL DE LOS MÚSCULOS EN LAS EXTREMIDADES INFERIORES 17
2.3.1 Músculo como órgano de equilibrio 17
2.3.2 Acción de los músculos en la fase de apoyo 17
2.3.3 Acción de los músculos en la fase de oscilación 17
2.4 PAPEL DEL PIE EN LA FASE DE APOYO 18
2.4.1 Posición del pie durante el movimiento 18
2.4.2 Estructura de sostén 18
2.4.3 Presiones aplicadas al pie en carga 19
2.5 MARCHA PATOLÓGICA 21
2.5.1 Marcha del amputado por debajo de la rodilla 21
2.5.2 En la fase de apoyo medio 23
2.5.3 Entre la fase media de apoyo y el despegue del pie 23
3. REQUERIMIENTOS DE MODELADO 25

3.1 REQUERIMIENTOS DE USO 25
3.2 REQUERIMIENTOS DE FUNCIÓN 25
3.3 REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES 25
4. PRÓTESIS DE MIEMBRO INFERIOR 26
4.1 AMPUTACIONES 26
4.1.1 Datos estadísticos Colombianos 26
4.1.2 Niveles de amputación 28
4.2 TIPOS DE PRÓTESIS 32
4.2.1 Prótesis transtibial 32
4.2.6 PRÓTESIS DE PIE 33
5. MODELADO DE LA MARCHA HUMANA 35
5.1 METODOLOGÍA EULER-LAGRANGE 35
5.1.1 Características del modelo Euler-Lagrange 36
5.2 MODELO DINÁMICO DE LA MARCHA HUMANA 38
5.2.1 Construcción del Modelo Dinámico 39
5.3 SIMULACIÓN DEL MODELADO 46
5.3.1 Código Matlab 46
5.3.2 Gráficas Simulación 48
5.3.3 Análisis de resultados 53
6. MATERIALES PROTÉSICOS 54
6.1 BIOMATERIALES 54
6.1.1 Propiedades de los biomateriales 55
6.1.2 Principales biomateriales 56
6.2 MATERIALES PARA LA FABRICACIÓN DE PRÓTESIS 58
6.3 SELECCIÓN DE CRITERIOS 60
6.3.1 ponderación 61
6.3.2 criterios de desempeño 61
6.3.3 Puntuación 62
6.3.4 ANÁLISIS DE LA PRÓTESIS DE PIE 62
6.3.5 SELECCIÓN DE CRITERIOS Y PONDERACIÓN 64
6.4 SELECCIÓN DEL MATERIAL 65
6.4.1 Polímero reforzado con Fibra de carbón 65
6.4.2 Fibras de carbono 66

6.4.3 Propiedades mecánicas a largo plazo 66
6.4.4 Propiedades físico-químicas 67
6.4.5 Propiedades térmicas 67
7. DISEÑO CAD PRÓTESIS DE PIE 68
7.1 DIMENSIONES PRÓTESIS DE PIE 68
7.1.1 Croquizado inicial 69
7.2 DISEÑO CAD PRÓTESIS PIE 70
7.2.1 Diseños iniciales CAD 70
7.2.2 Diseño final CAD 73
8. SIMULACIÓN DE LA MARCHA CON PROTESIS DE PIE 75
8.1 OpenSim 75
8.2 Simulación en OpenSim 75
8.2.1 Diseño de prótesis en CAD 76
8.2.2 Ensamblaje Prótesis y modelo musculoesquelético 77
CONCLUSIONES 81
BIBLIOGRAFÍA 82

LISTA DE FIGURAS

Pág.

FIGURA 1. EXO-PROTÉSICA 9
FIGURA 2. FLEX FOOT 10
FIGURA 3. PIERNA ROBÓTICA 10
FIGURA 4. DIVISIONES DEL CICLO DE MARCHA 12
FIGURA 5. LONGITUD DE PASO 13
FIGURA 6. SUBDIVISIONES DE LA FASE DE APOYO 14
FIGURA 7. SUBDIVISIONES DE LA FASE OSCILANTE 15
FIGURA 8. CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO HUMANO 16
FIGURA 9. LÍNEA DE DESPLAZAMIENTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD 16
FIGURA 10. EJE DE MOVIMIENTO DEL TOBILLO. 18
FIGURA 11. MECANISMO DE ARCO 19
FIGURA 12. FUERZA DE REACCIÓN DEL SUELO 19
FIGURA 13. ARCO PLANTAR 21
FIGURA 14. DESPLAZAMIENTO DEL ENCAJE CON RESPECTO AL PIE 22
FIGURA 15. DESPLAZAMIENTO POSTERIOR DEL ENCAJE 23
FIGURA 16. FRECUENCIA ANUAL DE VICTIMAS 26
FIGURA 17. DEPARTAMENTOS Y MUNICIPIOS CON MAYOR VÍCTIMA DE MINAS ANTIPERSONAS 27
FIGURA 18. ESTADÍSTICAS CENTRO NACIONAL DE MEMORIA HISTÓRICA 28
FIGURA 19. NIVELES DE AMPUTACIÓN 29
FIGURA 20. AMPUTACIÓN TRANSTIBIAL 31
FIGURA 21. PRÓTESIS TRANSTIBIAL 32
FIGURA 22. MODELO DE 5 ESLABONES DEL CUERPO HUMANO. 39
FIGURA 23. DESPLAZAMIENTO ANGULAR Y TORQUES 47
FIGURA 24. DESPLAZAMIENTO ANGULAR MUSLO 48
FIGURA 25. VELOCIDAD ANGULAR MUSLO 49
FIGURA 26. DESPLAZAMIENTO ANGULAR PANTORRILLA 50
FIGURA 27. VELOCIDAD ANGULAR PANTORRILLA 51
FIGURA 28. DESPLAZAMIENTO LINEAL PIERNA DERECHA 52
FIGURA 29. VELOCIDAD LINEAL PIERNA DERECHA 53
FIGURA 30. FIBRAS DE CARBONO 66
FIGURA 31. DIMENSIONES ANTROPOMÉTRICAS 68
FIGURA 32. CROQUIS INICIAL VISTA LATERAL 69
FIGURA 33. CROQUIS INICIAL VISTA DIMÉTRICA 70
FIGURA 34. PRIMER DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 70
FIGURA 35. FEA PRIMER DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 71
FIGURA 36. SEGUNDO DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 71
FIGURA 37. FEA SEGUNDO DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 72
FIGURA 38. TERCER DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 72
FIGURA 39. FEA TERCER DISEÑO PRÓTESIS DE PIE 73
FIGURA 40. DISEÑO FINAL PRÓTESIS DE PIE 73
FIGURA 41. FEA DISEÑO FINAL PRÓTESIS DE PIE 74
FIGURA 42. DISEÑO CAD TORNILLO 74
FIGURA 43. INTERFAZ NMS BUILDER 76
FIGURA 44. TIBIA Y SOCKET 76

FIGURA 45. PILAR Y SOCKET 77
FIGURA 46. DISPLAYER OPENSIM 78
FIGURA 47. ARCHIVO XML. 78
FIGURA 48. ENSAMBLAJE PRÓTESIS Y MODELO MUSCULOESQUELÉTICO 79
FIGURA 49. EMULACIÓN DE LA MARCHA 80

LISTA DE TABLAS

Pág.

TABLA 1. CICLO DE MARCHA 13
TABLA 2. VICTIMAS DE (MAP) Y (MUSE) 26
TABLA 3. PRÓTESIS DE PIE 34
TABLA 4. VARIABLES UTILIZADAS EN EL MODELADO DE LA MARCHA HUMANA. 40
TABLA 5. VALORES VARIABLES 47
TABLA 6. COMPARACIÓN BIOMATERIALES 58
TABLA 7. MATERIALES COMUNES EN PROTÉSICA 59
TABLA 8.PROPIEDADES DEL ALUMINIO 59
TABLA 9. PROPIEDADES DEL POLÍMERO REFORZADO CON FIBRA DE CARBÓN 60
TABLA 10. ANÁLISIS DE MATERIALES PROTÉSICOS 63
TABLA 11. PONDERACIÓN DE CRITERIOS DE LA PRÓTESIS DE PIE. 64
TABLA 12. MÉTODO DE PONDERACIÓN LINEAL PRÓTESIS DE PIE. 64
TABLA 13. DIMENSIONES ANTROPOMÉTRICAS 69

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. CÓDIGO MATLAB DESPEJE DE VARIABLES 86
ANEXO B. CÓDIGO MATLAB IMPLEMENTACIÓN ODE45 90

RESUMEN

Las prótesis de pie en el mundo han permitido que las personas con amputaciones puedan volver a tener movilidad, a tener una apariencia física normal y a una mejor calidad de vida.

En este proyecto se desarrolla una prótesis de pie partiendo del análisis y estudio de la marcha humana, donde se observa el comportamiento de las extremidades inferiores, las fuerzas generadas y el trabajo del pie como elemento de apoyo.

Después de analizada la marcha humana se crea un proceso para el diseño de un modelo matemático dinámico, que permita observar con ecuaciones el comportamiento de cada una de las partes del cuerpo humano al caminar; finalmente se desarrolla la simulación de la marcha en un software como OpenSim o Solid Works.

ABSTRACT

The foot prosthesis in the world have allowed that the people with amputations can again to have mobilitie, to have a normal physical appearance and to have a better life quality.

In this project develops a foot prosthesis starting from the analysis and study of the human gait, where show the behavior of the lower extremities, the generated forces and the work of the foot like support element.

After to analyze the human gait is created a process for the design of a dynamic mathematical model to allowed watch with equations the behavior of each body parts to walk; finaly is develop the simulate in a software like OpenSim or Solid Works.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad hay muchas personas que carecen de alguna de sus extremidades en el cuerpo debido a amputaciones por accidentes o debido a alguna malformación en la etapa de gestación que produce que la persona nazca así.

En el proyecto planteado se pretende diseñar una prótesis para pie, el cual se adecue a la estructura y morfología de la persona que la use. Este diseño no va a ser estándar, ya que no todas las personas tienen la misma estructura y se generan muchas variaciones dependiendo la edad, dimensiones y otros aspectos físicos.

El proyecto se realizará en el transcurso del año 2017 y se tendrá apoyo directo con docentes del área de la mecánica, y de artículos y publicaciones certificadas de ingeniería, medicina, fisioterapia e ingeniería biomédica.

1. GENERALIDADES

1.1 JUSTIFICACIÓN

El proyecto se implementa buscando una solución óptima a las dificultades de movilidad que presentan las personas con amputaciones de pie debido a su discapacidad.

El desarrollo del proyecto ayudara a elevar los conocimientos que se tienen sobre la bioingeniería, además de incluir un tema de estudio que actualmente en la faculta de ingeniería mecatrónica de la Universidad Piloto de Colombia no se ha aplicado el cual es la ingeniería biomédica. Para la sociedad y el ámbito estudiantil es muy bueno exponer este tipo de temas de investigación, ya que actualmente en Colombia existen muy pocos centros de desarrollo biomédico.

Para el desarrollo del proyecto se tendrá como base los estudios que se han hecho anteriormente en el mundo, además del apoyo de profesores profesionales en el área de la mecánica y mecatrónica y estudiantes con interés en el desarrollo de la biomedicina en Colombia.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Modelar y simular una prótesis de accionamiento mecánico de pie para seres humanos con un grado de libertad.

1.2.2 Objetivos específicos

- Analizar desde el punto físico las diferentes etapas del proceso de marcha humana y generar el modelo matemático para su estudio.

- Implementar el diseño en un programa de simulación que permita observar el funcionamiento de la prótesis de pie, además donde se pueda analizar simultáneamente el movimiento con un grado de libertad.

- Evaluar el desempeño del dispositivo simulado.

- Seleccionar el material que mejor se adapte al modelo físico

1.3 DELIMITACIONES DEL PROYECTO

1.3.1 Alcances y limitaciones

Alcances

- Diseño, simulación y análisis de la prótesis de pie sin llegar a la construcción de un prototipo físico.
- En el proceso de selección de materiales, se buscara un diseño con materiales económicos que permitan cumplir con las exigencias del diseño.

Limitaciones

- Todos los cálculos se realizaran tomando como base la marcha en un plano horizontal.
- Se desarrollara un diseño para adultos tomando como referencia los estándares físicos masculinos de la población colombiana.
- Para el análisis, se tendrán en cuenta que la prótesis de pie solo tiene un grado de libertad.

1.3.2 Línea de investigación del programa

- Robótica y Biomecátronica.

1.4 MARCO REFERENCIAL

1.4.1 Estado del arte

A continuación se da una reseña histórica de la evolución de las prótesis en el mundo, esta información se basa en el artículo “Historia de la ortopedia” de José L. Bado.

La fase moderna de las prótesis comienza en el siglo XVI. No obstante, hay esfuerzos anteriores para resolver este problema de tanto interés. Una pierna de madera encontrada en Capua, en el sur de Italia, y exhibida en la actualidad en el Museo del Royal Collage of Súrgenos, en Londres, data probablemente del año 300 a.C. Una mano de hierro perteneciente a Marcus Silus, un soldado, y un pie artificial hecho por Hegesistratus, pertenecen también al mismo período. Menciones análogas se encuentran en la literatura griega y latina, que se remontan a los siglos II y III a.C., y muestran la preocupación ya existente en esa época de la sustitución por la madera y el hierro de las extremidades perdidas.

- **Alta Edad Media (476 a 1000)**

La mayoría de las prótesis elaboradas en esa época se utilizaba para esconder deformidades o heridas producidas en el campo de batalla. A un caballero se le colocaba una prótesis diseñada solamente para sostener un escudo o para calzar la pata en el estribo, y se prestaba poca atención a la funcionalidad.

- **Principios de 1500**

En 1508, se elaboró un par de manos de hierro tecnológicamente avanzadas para el mercenario alemán Gotz von Berlichingen después de que perdió su brazo derecho en la batalla de Landshut. Era posible manejar las manos fijándolas con la mano natural y moverlas soltando una serie de mecanismos de liberación y resortes, mientras se suspendían con correas de cuero.

- **Mediados y fines de 1500**

El barbero y cirujano del Ejército Francés Ambroise Paré es considerado el padre de la cirugía de amputación y del diseño protésico moderno. Introdujo modernos procedimientos de amputación (1529) en la comunidad médica y elaboró prótesis (1536) para amputado extremidades superior e inferior. Además, inventó un dispositivo por encima de la rodilla, que consistía en una pata de palo que podía flexionarse en la rodilla y una prótesis de pie con una posición fija, un arnés ajustable, control de bloqueo de rodilla y otras características de ingeniería que se utilizan en los dispositivos actuales. [1]

- **Siglos XVII al XIX**

En 1696, Pieter Verduyn desarrolló la primera prótesis por debajo de la rodilla sin mecanismo de bloqueo, lo que más tarde sentaría las bases de los actuales dispositivos de articulación y corsé. En 1800, el londinense James Potts diseñó una prótesis elaborada con una pierna de madera con encaje, una articulación de rodilla de acero y un pie articulado controlado por tendones de cuerda de tripa de gato desde la rodilla hasta el tobillo.

En 1843, Sir James Syme descubrió un nuevo método de amputación de tobillo que no implicaba una amputación a la altura del muslo. Esto fue bien recibido dentro de la comunidad de amputados porque representaba una posibilidad de caminar con una prótesis de pie en lugar de con una prótesis de pierna.
En 1863, Dubois Parmlee inventó una prótesis avanzada con un encaje de succión, una rodilla policéntrica y un pie multi-articulado. Más tarde, en 1868, Gustav Hermann sugirió el uso aluminio en lugar de acero para que las extremidades artificiales fueran más livianas y funcionales. Sin embargo, el dispositivo más liviano tendría que esperar hasta 1912, cuando Marcel Desoutter, un famoso aviador inglés, perdió su pierna en un accidente de avión y elaboró la primera prótesis de aluminio con la ayuda de su hermano Charles, que era ingeniero. [2]

1.4.2 Tipos de prótesis modernas

- **Exo-protésica:** El diseñador industrial estadounidense Adam Root creo una prótesis personalizable para piernas que utiliza la tecnología de fabricación digital y la impresión 3D. Está desarrollado a partir de una combinación de escáner, impresión y modelado 3D, permite un procedimiento más preciso y asequible al optimizar la cantidad de material utilizado en la prótesis. [3]

FIGURA 1. Exo-Protésica

Fuente: **www.catalogodiseno.com/**

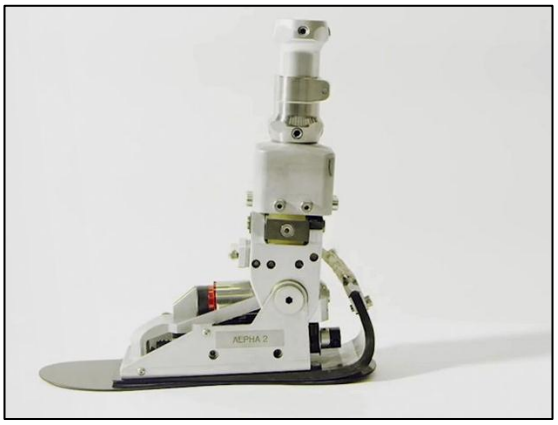
- **Flex foot:** La prótesis Cheetah es la más empleada por los deportistas. También se caracteriza por su forma en “J” que se comprime en el impacto y se produce una absorción de energía de alto nivel que, de otra manera serían absorbidos por el tobillo, rodilla, cadera y lumbar del corredor. Los estudios han demostrado que el Cheetah Flex-Foot puede devolver el 90% de la energía almacenada, mientras que una normal puede devolver hasta el 49% [4]. (Figura 2.)

FIGURA 2. Flex foot

Fuente: **https://www.ossur.com/prosthetic-solutions/**

- **Piernas Robóticas:** Están confeccionadas con silicona, titanio, aluminio y carbono. Funcionan con un motor de propulsión a gas que hace las veces de un tobillo humano. El cerebro del usuario envía impulsos eléctricos a todas las partes de nuestro cuerpo y así logra que nuestros músculos se muevan a voluntad, las piernas robóticas son capaces de recibir estos impulsos y traducirlos igual que lo hacen nuestros músculos. [5]

FIGURA 3. Pierna robótica



Fuente: **http://www.xataka.com/**

1.5 MARCO METODOLÓGICO

1.5.1 Metodología

Para la investigación del proyecto se utilizará el método empírico analítico ya que se profundizará en el estudio de los desarrollos que se han hecho sobre las prótesis, especialmente en las prótesis de pie.

Se hará recolección de información pertinente a la marcha humana, para entender de forma clara y precisa lo relativo al movimiento del pie, utilizando fuente bibliográficas científicas, hospitales donde se hayan tratado personas con amputaciones (como el hospital militar), artículos médicos, artículos científicos y proyectos o tesis donde el tema principal sea las prótesis de pie.

Será necesario crear formulaciones matemáticas y mecánicas donde se pueda relacionar la marcha humana con los puntos de apoyo y esfuerzos que realiza una persona al caminar.

La investigación desarrollada será cuantitativa y evaluativa, ya que el punto central son las personas que han sufrido mutilaciones en el pie o que presentan alguna deformidad de las extremidades inferiores que los obliga a utilizar una prótesis para caminar o cualquier actividad física, donde se involucre la marcha.

El principal objetivo de analizar la marcha de un ser humano es facilitar la comprensión del desplazamiento del mismo en el espacio y poder comparar las alteraciones que se presenta en la marcha cuando se ha presentado alguna lesión o intervención quirúrgica, en este caso profundizando en sujetos que han presentado amputación en sus extremidades inferiores.

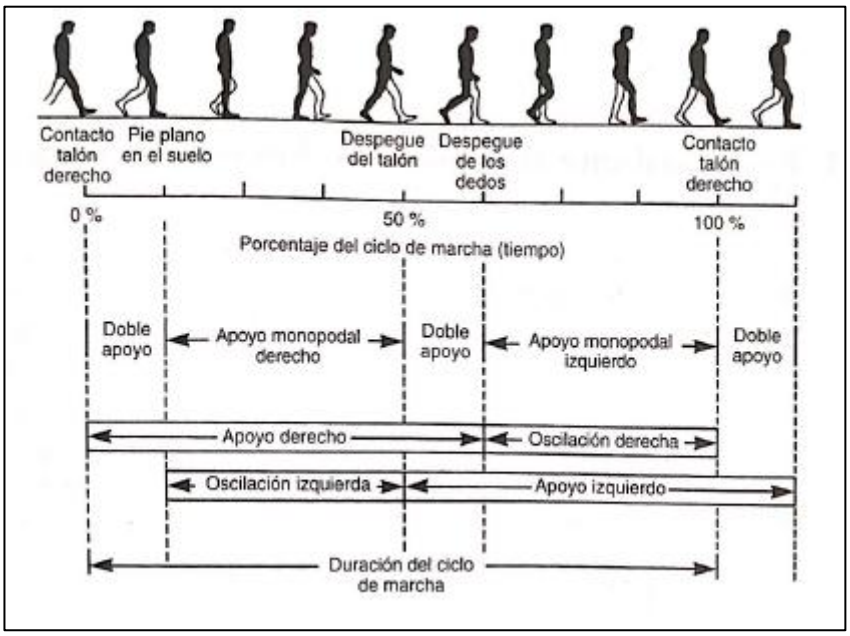
2.1 FASES DE LA MARCHA HUMANA

La locomoción humana normal se ha descrito como una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento hacia delante del centro de gravedad.

Por convención internacional se describe como marcha la trayectoria seguida por el miembro inferior derecho, donde este ciclo se divide en dos fases; la primera fase es la de Apoyo, donde trabajan los músculos estabilizadores, y la segunda fase es la de Oscilación, en la cual el miembro inferior, flexionado en la rodilla avanza para llegar al suelo.

El periodo de apoyo monopodal se encuentra subdividido en tres partes que son, los dobles contactos de principio y fin, y el periodo de equilibrio sobre un solo pie. [6]

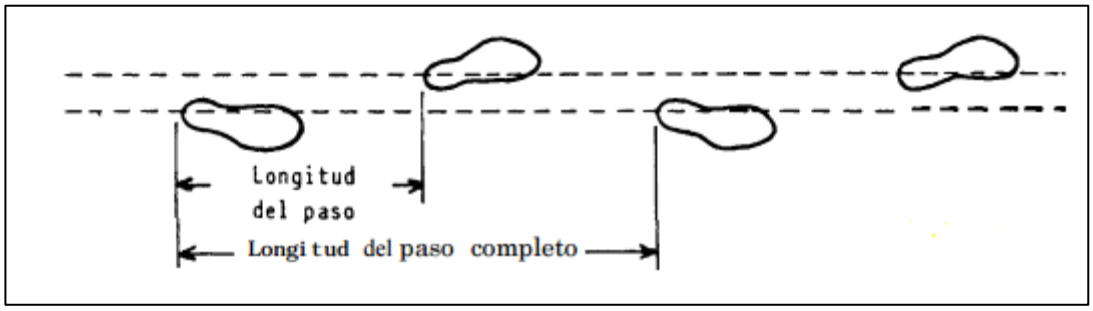
FIGURA 4. Divisiones del ciclo de marcha



Fuente: **LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO**

La longitud del paso completo es la distancia lineal entre los sucesivos puntos de contacto del talón del mismo pie. Longitud del paso es la distancia lineal en el plano de progresión entre los puntos de contacto de un pie y el otro pie.

FIGURA 5. Longitud de paso



Fuente: http://www.oandplibrary.org/

2.1.1 Fase de apoyo sencillo y doble

La fase de apoyo sencillo es en donde soló un pie se encuentra en contacto con la superficie, en contraste la fase de apoyo doble es en el cual los dos pies están en contacto con la superficie simultáneamente. Este apoyo doble se trata de un contacto final de los dos dedos (pie abandonando el suelo) en un lado, y el inicio de la carga en una pequeña porción del talón (pie que hace contacto con la superficie) en el otro.

La ausencia de un período de doble apoyo diferencia el correr del caminar. [7]

Tabla 1. Ciclo de marcha

CICLO DE MARCHA		
Apoyo		Oscilación
Apoyo simple	40%	40%
Apoyo Doble	20%	
60%		40%

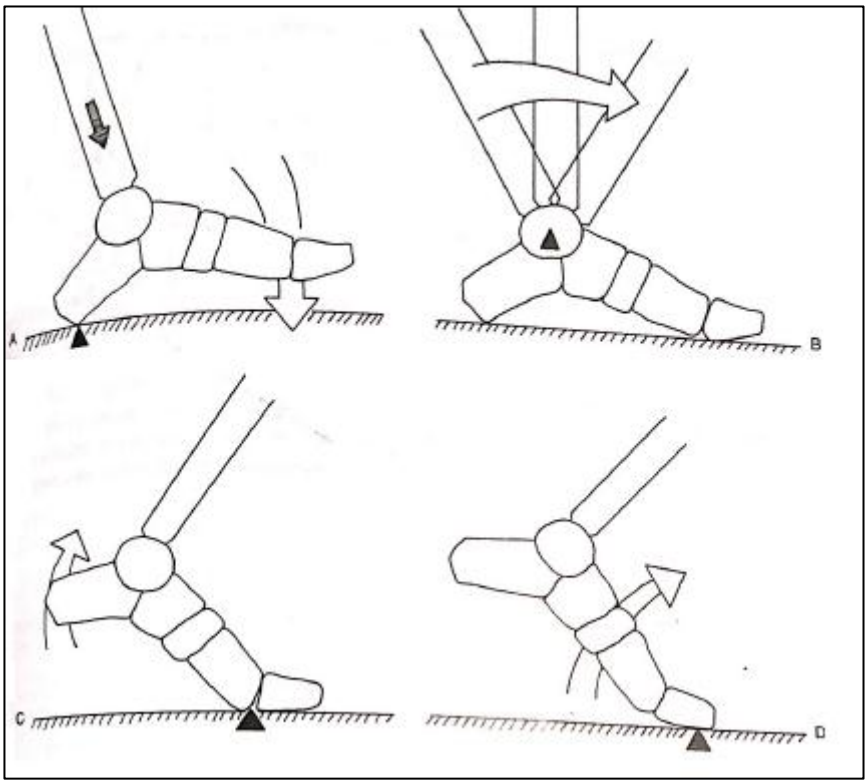
Fuente: LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO

2.1.1.1 Subdivisión de la fase de apoyo

Hay cinco subdivisiones en la fase de apoyo que deben considerarse:

- **Contacto del talón:** Es el instante en el talón de la pierna de referencia toca el suelo.
- **Apoyo plantar:** Es el contacto de la parte anterior del pie con el suelo.
- **Apoyo medio:** Ocurre cuando el trocánter mayor (saliente óseo que se encuentra situado en la extremidad superior del fémur) está alineado verticalmente con el centro del pie, visto desde un plano sagital.
- **Elevación del talón:** Momento en donde el talón se eleva del suelo.
- **Despegue del pie:** Momento en el que los dedos se elevan del suelo. [6]

FIGURA 6. Subdivisiones de la fase de apoyo



Fuente: **LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO**

2.1.2 Fase oscilante

La fase oscilante representa el 40% del tiempo total del ciclo. El miembro inferior despegado del suelo pasa bajo el tronco, con la rodilla flexionada para llegar al suelo por delante de la persona. Esta fase suele estar alterada por disfunciones musculares, especialmente por rigideces y desincronización de la coordinación por estabilidad.
Los músculos están casi inactivos en esta fase; el miembro inferior se comporta como un doble péndulo. El movimiento depende, sobre todo, del impulso inicial (velocidad angular del muslo). A partir de esta aceleración el muslo y la pierna se comportan como un péndulo obligado que no requiere control muscular. La trayectoria está predeterminada.

Un débil control muscular permite a la persona reaccionar rápidamente ante cualquier obstáculo en su camino, y evitar tropezar con los dedos o caer. La fase de oscilación del miembro inferior termina en el instante preciso en que el talón libre retoma el contacto con el suelo.

2.1.2.1 Subdivisiones de la fase oscilante

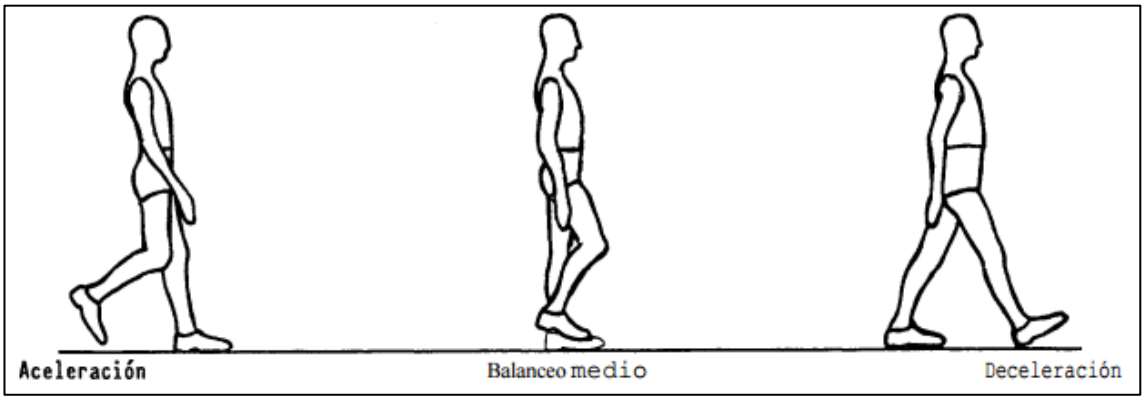
La fase de oscilación puede dividirse en tres intervalos designados con los términos de aceleración, balanceo medio y deceleración. Cada una de estas subdivisiones constituye aproximadamente un tercio de la fase de oscilación.

- **Periodo de aceleración:** Se caracteriza por la rápida aceleración del extremo de la pierna inmediatamente después de que los dedos dejan el suelo.

- **Balanceo medio:** La pierna balanceada pasa a la otra pierna, moviéndose hacia delante de la misma, ya que está en fase de apoyo.

- **Deceleración:** Está caracterizado por la deceleración de la pierna que se mueve rápidamente cuando se acerca al final del intervalo

FIGURA 7. Subdivisiones de la fase oscilante

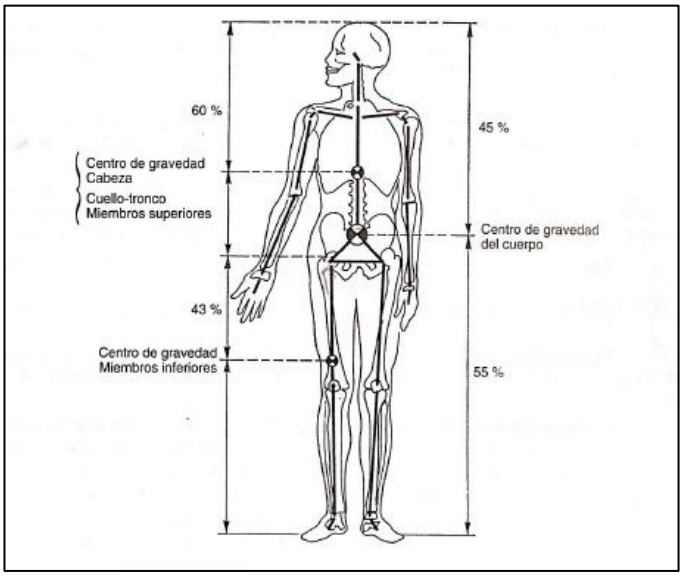


Fuente: **http://www.oandplibrary.org**

2.2 CENTRO DE GRAVEDAD

El centro de gravedad es el punto formal que representa el centro de masa del cuerpo, inmóvil o móvil. Una vez determinada la posición del CG, es más fácil comprender el movimiento. Cuando el centro de gravedad se eleva con relación a la base, la estabilidad dinámica mejora. Bajar la posición del CG mejora el equilibrio estático, pero reduce la capacidad de equilibrio dinámico. [7]

FIGURA 8. Centro de gravedad del cuerpo humano

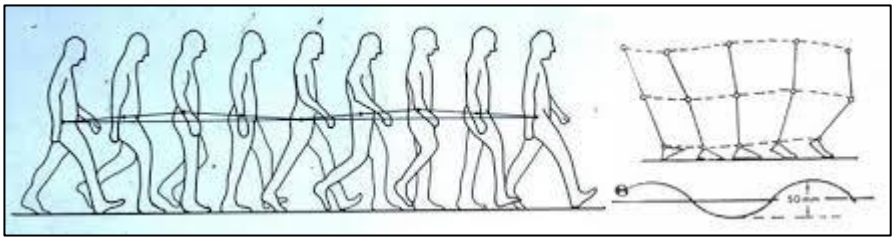


Fuente: **LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO**

2.2.1 Línea de Centro de gravedad

En la marcha humana el CG se mueve hacia arriba y hacia abajo, de manera rítmica, mientras haya un desplazamiento hacia adelante. El punto más alto se produce cuando la extremidad que carga el peso está en el centro de su fase de apoyo; el punto más bajo ocurre en el momento del apoyo doble, cuando ambos pies están en contacto con el suelo. El punto medio de este desplazamiento vertical en el adulto masculino es aproximadamente de 5 cm (Figura 9). [8]

FIGURA 9. Línea de desplazamiento del centro de gravedad



Fuente: **https://ft-mecanicabiociencias.wikispaces.com/**

2.3 PAPEL DE LOS MÚSCULOS EN LAS EXTREMIDADES INFERIORES

Los estudios realizados por Eberhardt mostraron que los músculos absorben más energía en el momento de desaceleración de la marcha que en el movimiento progresivo hacia adelante. Los músculos cumplen tres funciones principales importantes durante la marcha:

- Frenado de los segmentos arrastrados por la energía cinética.
- Amortiguación de impactos y vibraciones.
- Aceleración de los segmentos, en escasa medida.

2.3.1 Músculo como órgano de equilibrio

La persona en apoyo monopodal se comporta como un péndulo invertido, sujeto por el pie y móvil alrededor del tobillo.
La marcha implica a dos trayectorias contradictorias: laterolateral para la articulación substragaliana en el momento de apoyo y laterolateral para la pelvis, pero simultáneamente anteroposterior para las flexiones de cadera y rodilla. Una persona equilibrada sobre un pie anclado al suelo, se comprende el papel que desempeñan los músculos laterales del tobillo, y los músculos aductores/abductores de la cadera, encargados de garantizar el equilibrio en la pelvis.

2.3.2 Acción de los músculos en la fase de apoyo

Durante la fase de apoyo, el miembro inferior se ve sometido a fuerzas de compresión porque todo el peso del cuerpo descansa sobre un solo pie. Esta es una actividad bastante pronunciada para los músculos la fase de apoyo, y los músculos activos se denominan “músculos de apoyo”.

Las acciones musculares de la fase de apoyo se reparten entre la amortiguación de impactos, el frenado viscoelástico de estabilización, la aceleración de segmentos y la protección del esqueleto óseo mediante contracciones estabilizadoras.

2.3.3 Acción de los músculos en la fase de oscilación

Durante la fase de oscilación donde se permite el movimiento hacia delante del pie que ha despegado del suelo, el miembro inferior está libre y se comporta como un doble péndulo. La longitud del miembro se reduce para permitir el avance del pie, que pasa muy cerca del suelo.

El trabajo de los “músculos de oscilación” es de poca magnitud y consiste en un frenado (isquiotibiales) y en un ajuste de la rigidez activa en anticipación a la necesidad de asegurar la amortiguación de un impacto (compartimiento anterior de la pierna) o en la prevención de una inestabilidad potencial (cuádriceps). [7]

2.4 PAPEL DEL PIE EN LA FASE DE APOYO

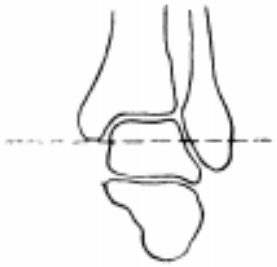
2.4.1 Posición del pie durante el movimiento

La posición del pie en el suelo es un elemento esencial del equilibrio en la fase de apoyo, esta posición es resultado de una anticipación o construcción interna de la marcha y de la ubicación visual del suelo delante de la persona. En condiciones normales, es suficiente la llegada de informaciones visuales intermitentes. Esta verificación frecuente del suelo permite una colocación precisa del pie.
La visión reguladora se divide en dos partes: visión central, que es más eficaz para controlar las oscilaciones mediolaterales, y visión periférica, que es la principal responsable del equilibrio anteroposterior.

2.4.1.1 Eje de movimiento del tobillo

Cuando la persona está de pie, se considera que el eje del tobillo es esencialmente horizontal a nivel del extremo distal del maléolo interno y cerca de 25 grados en rotación externa, en relación al eje de la rodilla se halla en un plano frontal.
La articulación del tobillo tiene una amplitud de movimiento de aproximadamente 20 a 30 grados en dorsiflexión y de 30 a 50 grados en flexión plantar. [6]

FIGURA 10. Eje de movimiento del tobillo.



Fuente: **http://www.oandplibrary.org**

2.4.2 Estructura de sostén

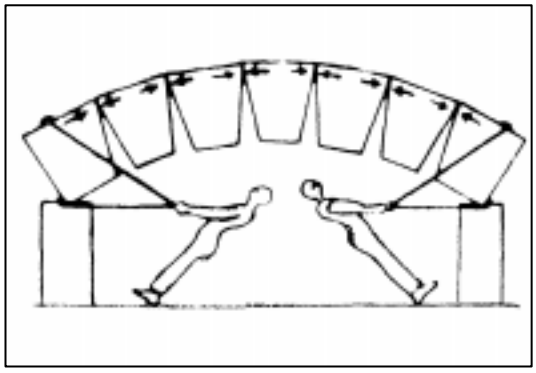
- **El pie como mecanismo de arco y viga**

Para soportar el peso del cuerpo, el pie funciona de forma análoga a un arco y viga.
El arco es un elemento estructural curvo el cual permite soportar cargas por encima de un vacío. Una de las características principales es que las cargas soportadas tienden a aplanar el arco, forzando a apartarse a sus extremos.

Al observar el pie en un plano sagital, las cabezas de los metatarsianos y el talón corresponderán a los dos extremos de un arco. La aponeurosis plantar es la encargada de mantenerlos unidos. Sirve para impedir que el talón y los metatarsianos se separen.

Cuando el arco longitudinal se aplana hasta un grado apreciable, aumenta la presión en las presiones dorsales de los huesos del tarso. En un pie normal los ligamentos y músculos impiden el aplanamiento del arco.

FIGURA 11. Mecanismo de arco



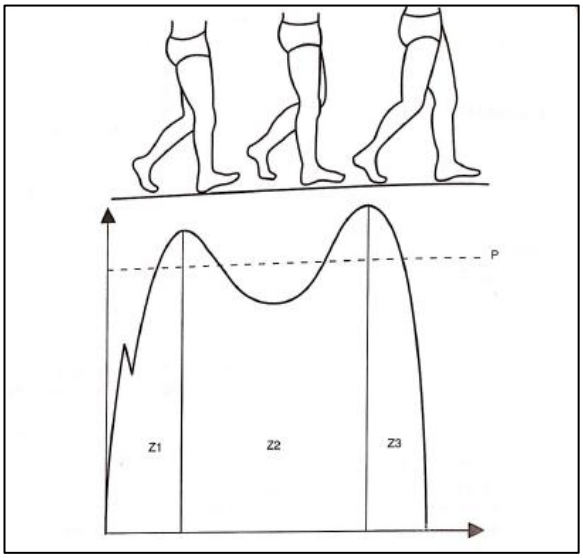
Fuente: http://www.oandplibrary.org

El pie también trabaja como una viga ya que cuando una la viga se encuentra recargada, se curva, sometiendo sus extremos a compresión, como sucede con el pie en la fase de apoyo en la marcha.

2.4.3 Presiones aplicadas al pie en carga

La persona que se desplaza a una velocidad normal contacta con el suelo aplicando una fuerza ligeramente superior al peso del cuerpo a cada paso: entre un 120% a 3,5 km/h y un 150 % a 5 km/h. Estos valores sufren variaciones dependiendo el terreno y el tipo de calzado, pero el impacto siempre supera el peso del cuerpo de la persona (Figura 12).

FIGURA 12. Fuerza de reacción del suelo



P: Peso del sujeto; Z1 y Z3: Picos de sobrecarga

Fuente: LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO

2.4.3.1 Esqueleto fibroso

El pie actúa como un resorte de lámina, dejándose comprimir, y como un amortiguador hidráulico, disipando una parte de las presiones. La carga determina, en las pequeñas articulaciones, movimientos complejos de deslizamiento y rotación en los tres ejes del espacio.
El pie sabe restituir una parte de la compresión a la que está sometido, lo cual lo asemeja a un resorte libre de compresión.
Los tendones y aponeurosis son estructuras con potencial elástico. El pie está sujetado por tendones extensibles que se dejan estirar y absorben parte de la carga. Los tendones y aponeurosis almacenan una parte de la energía producida por el aplastamiento y la restituyen al final de la fase de apoyo, reduciendo el trabajo de los músculos.

2.4.3.2 Amortiguación por la grasa del talón

La grasa situada bajo el talón tiene la ventaja de ser anisotropíca: si se desplazan las partes blandas del talón lateralmente no se encuentra resistencia. Si se intenta comprimirla verticalmente, la rigidez es importante.
La superficie del talón disponible para el impacto es muy reducida, una medida de $23cm^2$ para el talón entero y 15 cm^2 de superficie para el calcáneo.

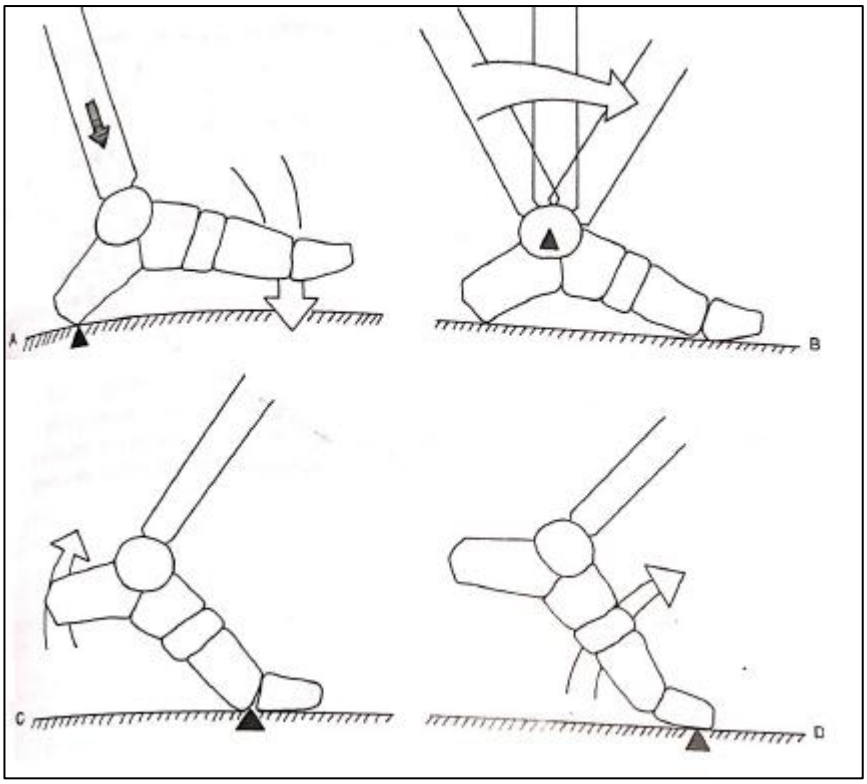
2.4.3.3 Transmisión de las presiones por el borde externo del pie

Un arco óseo transversal, protegido por elementos fibrosos, termina en el borde externo del pie y asegura la transmisión al suelo de las cargas aplicadas por el peso del cuerpo.
El desplazamiento del centro de presión a lo largo del pie muestra una prevalencia del apoyo sobre el borde externo, que participa además en el equilibrio y la propulsión.

2.4.3.4 Modificaciones del arco del pie durante el paso

El arco del pie sufre una deformación similar al de un resorte de lámina. La aplicación de presiones verticales genera un aplanamiento del arco y un aumento de longitud del pie durante la carga.
El arco longitudinal del pie humano tiene la característica de resorte/amortiguador y permite la carrera. Un pie plano y largo, con el navicular y la cabeza del astrágalo tocando el suelo, permite andar en posición erecta pero no correr. Ver Figura 13. [7]

FIGURA 13. Arco plantar



A) Angulo de contacto con el suelo del tarso posterior y lo metatarsianos
B) con el dedo en extensión, el metatarsiano desciende y el pie aumenta la concavidad
c) Unión calcáneo/dedos por láminas fibrosas.

Fuente: LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO

2.5 MARCHA PATOLÓGICA

A continuación se de una descripción de los tipos de marcha patológica descritos en el manual “ortésica del miembro inferior” de la universidad de Nueva York.

El cuerpo humano siempre está sometido a cargas y fuerzas de gran magnitud. Las más importantes son las producidas por la gravedad y por la actividad muscular. Un cuerpo normal sin ningún afectación no presenta problema alguno para soportar las fuerzas aplicadas a sus estructuras y los músculos pueden generan fuerzas para el sostén, equilibrio, locomoción y acción sobre objetos externos. Cuando el cuerpo humano no puede soportar las fuerzas aplicadas, o no se pueden generar fuerzas suficientes para el funcionamiento normal es cuando existe una mecánica patológica. Además la deficiencia del aparato locomotor conlleva un aumento de gasto energético durante la marcha.

2.5.1 Marcha del amputado por debajo de la rodilla

El principal análisis de la marcha patológica es identificar las variaciones más comunes y las causas que los producen. En este caso se deben analizar principalmente las desviaciones en amputaciones por debajo de la rodilla ya que se pretende diseñar una prótesis de pie.

Las alteraciones de la marcha en un amputado por debajo de la rodilla se presentan en las siguientes etapas: entre la fase de apoyo del talón y la de apoyo medio, en la fase de apoyo medio, entre la fase media y el despegue del pie, y durante la fase de balanceo.

2.5.1.1 Entre la fase de apoyo del talón y la de apoyo medio

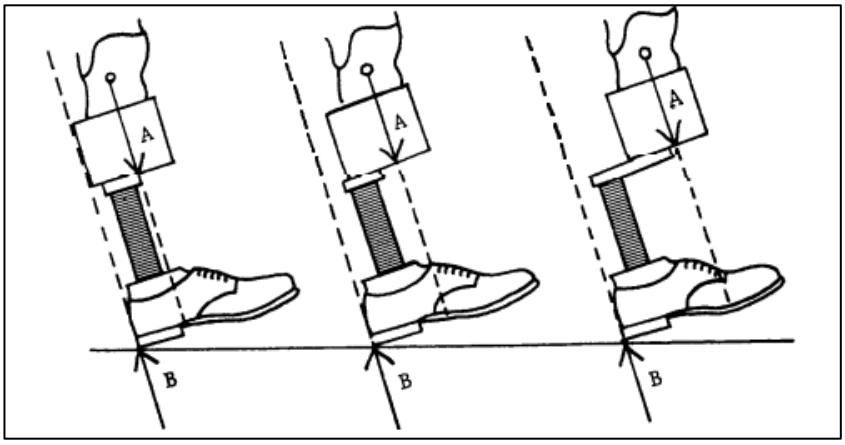
Las alteraciones más comunes presentadas en esta etapa son:

A. Excesiva flexión de la rodilla

En la marcha normal, el promedio de flexión de la rodilla después del apoyo del talón es de 15 a 20 grados. El amputado por debajo de la rodilla puede aumentar este movimiento de flexión de la rodilla del lado amputado por cualquiera de las siguientes razones:

- Excesiva flexión dorsal del pie o excesiva inclinación hacia delante del encaje.
- Excesiva dureza de la goma que limita la articulación o de la cuña esponjosa del talón en la flexión plantar.
- Contractura en flexión o mala colocación de la correa de suspensión.
- Excesivo desplazamiento anterior del encaje con respecto al pie.

FIGURA 14. Desplazamiento del encaje con respecto al pie



El momento de fuerza tiende a causar una rotación alrededor del apoyo del talón, aumentando cuando se mueve el encaje hacia adelante.

Fuente: **http://www.oandplibrary.org**

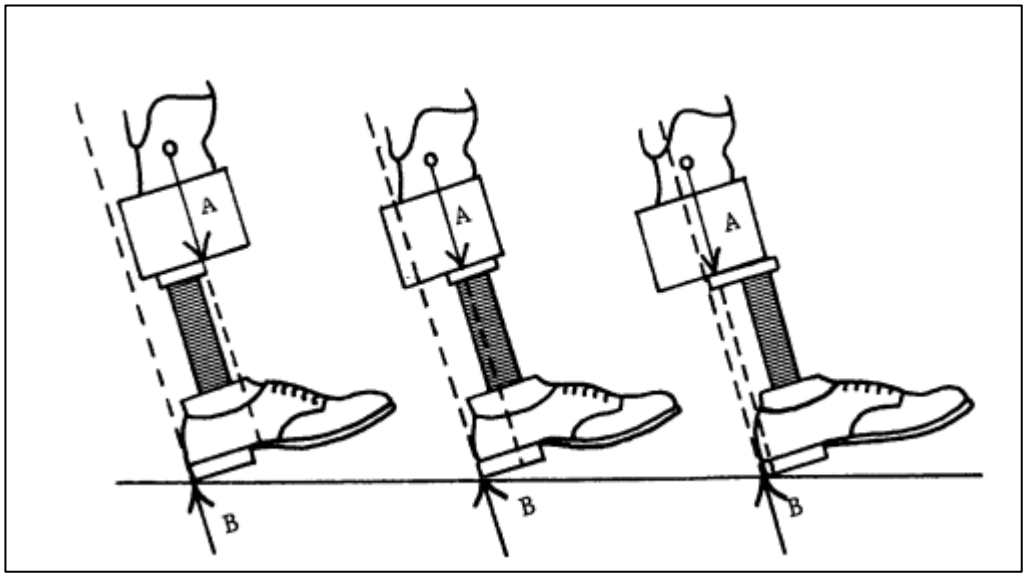
B. Insuficiencia o ausencia de flexión en la rodilla (Figura 15)

El amputado puede andar con muy poca o ninguna flexión de la rodilla del lado amputado, por una o varias de las siguientes razones:

- Excesiva flexión plantar del pie.
- Goma del talón excesivamente blanda.
- Molestias en la parte anterior distal del muñón
- Debilidad del cuádriceps.
- Costumbre

- Desplazamiento posterior del encaje sobre el pie.

FIGURA 15. Desplazamiento posterior del encaje



El desplazamiento posterior del encaje disminuye el momento de fuerza que causa la rotación de la prótesis alrededor del punto de apoyo formado por el talón y el suelo.

Fuente: http://www.oandplibrary.org

2.5.2 En la fase de apoyo medio

Las alteraciones más comunes presentadas en esta etapa son:

A. Excesiva inclinación lateral de la prótesis

La inclinación lateral se debe a la tendencia de la prótesis a rotar alrededor del muñón. Cuando esto ocurre, el borde medial del encaje presiona sobre el muñón, mientras el borde lateral tiende a separarse. Si es excesiva el amputado sufrirá demasiada presión en la región media proximal del muñón y puede que se dañen los ligamentos de la rodilla. Se puede originarse por:

- Colocación del pie en posición medial excesiva.
- Encaje en abducción.

2.5.3 Entre la fase media de apoyo y el despegue del pie

Las alteraciones más comunes presentadas en esta etapa son:

A. Flexión prematura de la rodilla

Si el peso del cuerpo se lleva antes de tiempo sobre las articulaciones metatarso-falángicas, la falta de apoyo anterior producirá una flexión prematura en la rodilla e incluso caída. Las posibles causas son:

- Excesivo desplazamiento anterior del encaje sobre el pie.
- Desplazamiento posterior de la articulación del antepié.
- Excesiva flexión dorsal del pie o excesiva inclinación hacia delante del encaje.

- Tope muy blando a la dorsiflexión del pie.

B. Flexión retardada de la rodilla

Si el cuerpo debe recorrer una mayor distancia antes de perder el apoyo anterior, la articulación de la rodilla queda en extensión durante la última parte de la fase de apoyo y el amputado tiende a tener la sensación de ir subiendo una colina, porque el centro de gravedad tiene que pasar sobre la rodilla extendida. Las causas pueden ser:

- Excesivo desplazamiento posterior del encaje sobre el pie.
- Desplazamiento anterior de la articulación del antepié o del talón.
- Desplazamiento anterior de la articulación del antepié o del talón.
- Goma de dorsiflexión dura. [6]

3. REQUERIMIENTOS DE MODELADO

Para el modelado y simulación de la prótesis de pie se deben tener varios requerimientos que permitan identificar las condiciones con las cuales se desarrollara el proyecto. Estos factores son muy importantes ya que permite enfatizar y generar la solución más viable.

3.1 REQUERIMIENTOS DE USO

La prótesis de pie debe permitir que el usuario (amputados por debajo de la rodilla) pueda mantenerse en pie y además de esto le permita desplazarse, simulando la marcha humana.
La prótesis debe estar diseñada con estándares de seguridad, los cuales se van a ir implementando con el desarrollo del proyecto, esto permite evitar cualquier accidente al momento de que el usuario utilice la prótesis.

El mantenimiento y cuidados que debe tener la prótesis deben ser los más mínimos para facilitar la manipulación por parte del usuario estos deben ser:

- Facilidad de limpieza de la prótesis, sin generar deformaciones en la misma o desgastes.
- Fácil ensamblaje y fácil empalme de usuario-prótesis.

Por otro lado el diseño debe simular la estructura del pie, permitiendo al usuario una fácil adaptación.

3.2 REQUERIMIENTOS DE FUNCIÓN

La función principal de la prótesis de pie es dar sostén al amputado y permitir la movilización simulando la marcha, esta prótesis le debe dar confianza al usuario y así entrar en una fase de rehabilitación con personal médico capacitado.

La prótesis tendrá diferentes esfuerzos aplicados, pero principalmente va a estar a compresión ya que soportará el peso de la persona, por tanto el diseño debe permitir que los materiales de fabricación soporten estos esfuerzos.

3.3 REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES

El diseño de la prótesis debe permitir al usuario que en el momento de la marcha su centro de gravedad no tenga variaciones excesivas para evitar caídas, además de esto la estructura debe tener una forma que se adapte al muñón y evite daños físicos o posibles desgastes en los huesos, articulaciones, vasos sanguíneos, entre otros. Por otro lado la prótesis debe permitir la simulación de la marcha lo más cercano posible y así evitar fatigas en el usuario.

4. PRÓTESIS DE MIEMBRO INFERIOR

Las prótesis existen desde tiempos remotos, y estas siempre han buscado ayudar a la recuperación de las personas que han sufrido alguna alteración en sus extremidades debido a enfermedades, deformidades congénitas, accidentes y la que es más común en Colombia, que son las lesiones traumáticas, producidas principalmente por minas antipersonas, que son parte del conflicto armado.

4.1 AMPUTACIONES

4.1.1 Datos estadísticos Colombianos

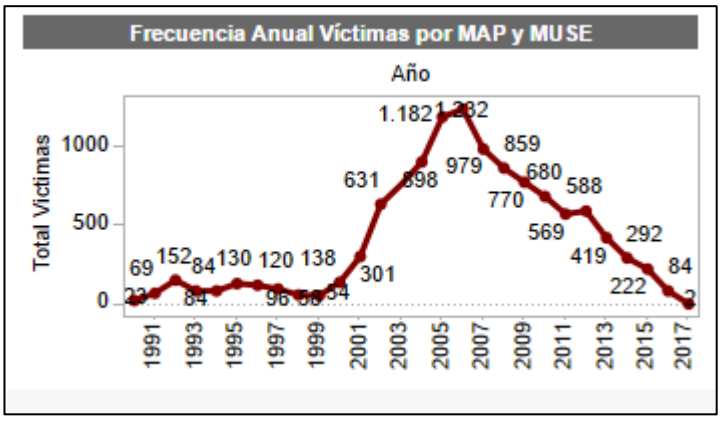
La Dirección Contra Minas de la Presidencia de la Republica, informa a través de su página web que entre el año 1990 y el 28 de Febrero de 2017 hubo alrededor de 11472 víctimas a causa de las minas antipersonas (MAP) y de las municiones usadas sin explosionar (MUSE). Esto muestra la cantidad de afectados que se ha presentado por el conflicto armado en Colombia y a consecuencia de esto, muchas personas han quedado discapacitadas, principalmente con daños físicos, como lo son las amputaciones de sus extremidades.

Tabla 2. Victimas de (MAP) y (MUSE)

ESTADÍSTICA DE 1990 A 2017			
	CIVILES	FUERZA PUBLICA	PORCENTAJE
HERIDOS	3610	5593	80,22%
MUERTOS	837	1432	19,78%

La frecuencia anual de victimas ha ido descendiendo, observando que en el año anterior solo hubo 84 víctimas, pero entre los años 2000 y 2006 se observó la mayor cantidad de víctimas por MPA y MUSE, lo cual indica que actualmente hay muchos discapacitados, principalmente amputados que necesitan tratamientos y por supuesto rehabilitación con prótesis.

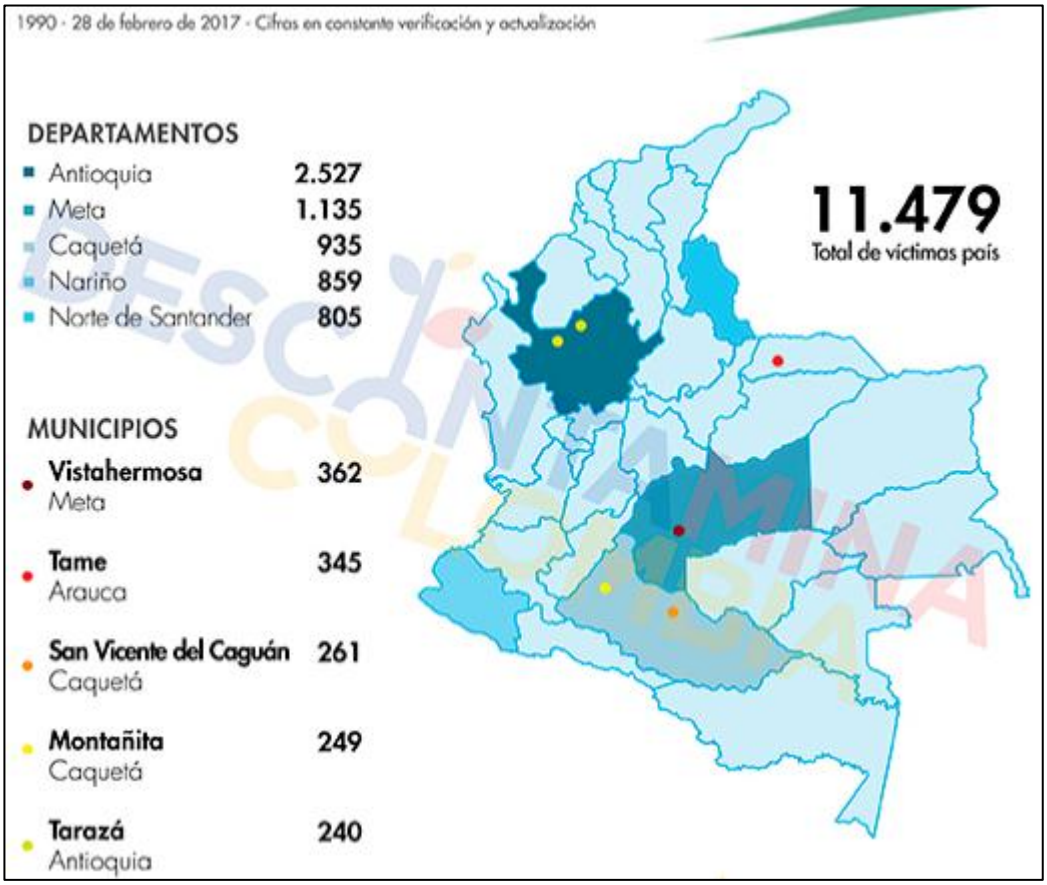
FIGURA 16. Frecuencia anual de Victimas



Fuente: http://www.accioncontraminas.gov.co/estadisticas/Paginas/victimas-minas-antipersonal.aspx

Además de esto hay algunos departamentos y municipios en donde el conflicto armado ha afectado con mayor fuerza a la población, en la Figura se observa en que sectores se evidencia esto.

FIGURA 17. Departamentos y municipios con mayor víctima de minas antipersonas



Fuente: **http://www.accioncontraminas.gov.co/Paginas/AICMA.aspx**

Por otro lado el Centro Nacional de Memoria Histórica, informa que en Colombia entre los años 1988 y 2012, el conflicto armado ha causado 2119 muertos y 8070 lesionados por minas antipersonas, lo cual ha generado que hallan muchos discapacitados por amputación en sus extremidades (figura 18.).

Estas estadísticas muestran que el conflicto armado con la guerrilla es el principal causante de tantos discapacitados por amputación en el país. (Figura 18.)

FIGURA 18. Estadísticas Centro Nacional de Memoria Histórica

Fuente: **http://www.centrodememoriahistorica.gov.co/micrositios/informeGeneral/estadisticas.html**

4.1.2 Niveles de amputación

A continuación se da una breve descripción de los niveles de amputación en los seres humanos descritos en el artículo “Rehabilitación del Amputado de Miembro Inferior” del Dr. Raidel La o Ramos

Hay muchos causas que llevan a un cirujano a la amputación de alguna de las extremidades inferiores en una persona, pero se cuál sea la razón, este procedimiento se debe realizar con el mayor control y cuidado posible, ya que si la amputación se realiza de una manera inadecuada puede afectar la locomoción del paciente y causar que este no pueda volver a caminar.

La etiología poder ser:

- **Traumáticas:** Son aquellas generadas por accidentes, conflictos bélicos o uno de los más comunes, minas anti personas, las cuales han dejado a un gran porcentaje de población mundial con lesiones debido a las guerras.

- **No Traumáticas:** Son aquellas que debido a enfermedades o deformaciones congénitas, se programa medicamente para ser intervenido quirúrgicamente. Entre las más comunes se encuentran:

  - Disvasculares (Diabetes mellitus / Enfermedad vascular periférica).
  - Infecciosas (Gangrena gaseosa / Osteomielitis crónica).
  - Neoplásicas (Tumores óseos / partes blandas).
  - Otras (amputaciones congénitas).

La amputación es irreversible y ningún miembro artificial posee percepción sensitiva.

Las patologías no son el único factor que se debe considerar al momento de decidir por parte del cirujano, el nivel de amputación más apropiado para el paciente, ya que hay otras variables que inciden, para que el paciente tenga la mejor recuperación.

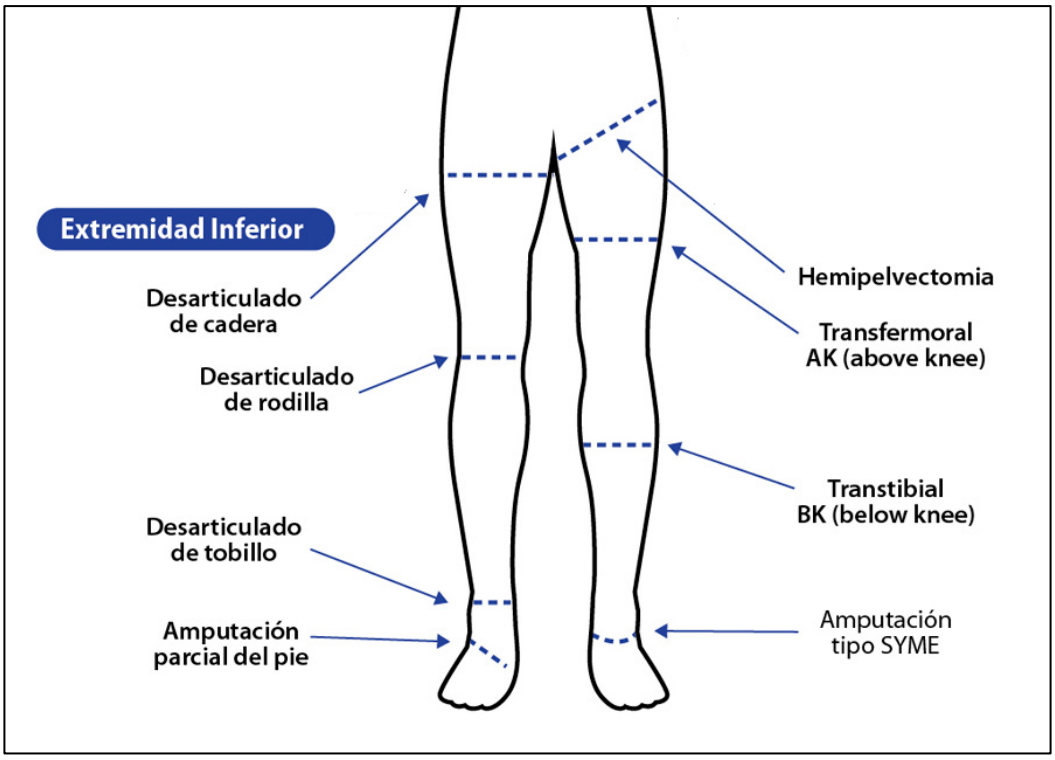
Los factores más relevantes a la hora de decidir cuál es el nivel de amputación más apropiado son:

- Patológico
- Anatómico
- Quirúrgico
- Protésico
- Personal por parte del paciente ya que influye el sexo, la edad y ocupación

Después de realizar un análisis completo de los factores se debe decidir cuál es la mejor opción para la cirugía, y poder seleccionar alguno de los niveles de amputación, los cuales pueden ser:

- Hemipelvectomía
- Desarticulación de cadera
- Transfemoral
- Desarticulación de rodilla
- Transtibial
- Desarticulación de tobillo
- Tipo syme
- Amputaciones distales.

FIGURA 19. Niveles de amputación



Fuente: **http://centrobionico.com/pages/protesis.php**

4.1.2.1 Amputación Transfemoral

Este tipo de amputación constituye la más característica y frecuente de la extremidad inferior.
Por lo general, estas amputaciones se practican en la unión del tercio medio y superior. La longitud ideal de esta clase de muñones se considera la de 25 a 30 cm desde el trocánter mayor, no olvidándose que la pérdida de cada centímetro de fémur supone una disminución o alteración del equilibrio muscular. Así, persisten los abductores que se insertan en el trocánter mayor, desplazando a los aductores que han perdido su inserción distal, por lo que el muñón tiende a colocarse en abducción dando origen a una marcha débil e inefectiva.
El muñón de muslo más corto que pueda conceptuarse eficaz funcionalmente es el de 7,5 cm por debajo del trocánter mayor. Si el muñón es muy voluminoso, su utilidad disminuye con el acortamiento. Pero, aun en aquellos casos en que tan solo persisten 2,5 cm de fémur por debajo del trocánter y es totalmente inefectivo desde el punto de vista funcional, todavía tiene una decisiva importancia como elemento protésico, ya que la sola persistencia de la cabeza de fémur y el gran trocánter supone una mejor adaptación y estabilidad de la prótesis. No obstante, por razones estéticas, en las mujeres es preferible practicar una desarticulación total. Esta desarticulación supone la misma posibilidad protésica que una hemipelvectomía.

El muñón excesivamente largo, superior a 32 cm, no añade ventaja alguna al paciente.

El final del muñón óseo se cubre con un colgajo osteoperióstico, los músculos antagonistas se cosen sobre el muñón óseo, escindiéndose la fascia al final del muñón. Estos muñones son fuertes, equilibrados, con buena tonicidad y excelentes para prótesis de succión. [9]

4.1.2.2 Desarticulación de Rodilla

El muñón logrado en la desarticulación de rodilla es excelente para soportar presiones, pero tiene un escaso valor protésico dado que no existe espacio para la colocación de los mecanismos de rodilla y nunca puede obtenerse una marcha funcional eficaz ni una buena apariencia estética. No obstante, puede practicarse en ancianos, dado que esta intervención produce menos shock y, en los niños, por persistir la epífisis ósea y no detenerse el crecimiento.

4.1.2.3 Amputación Transtibial

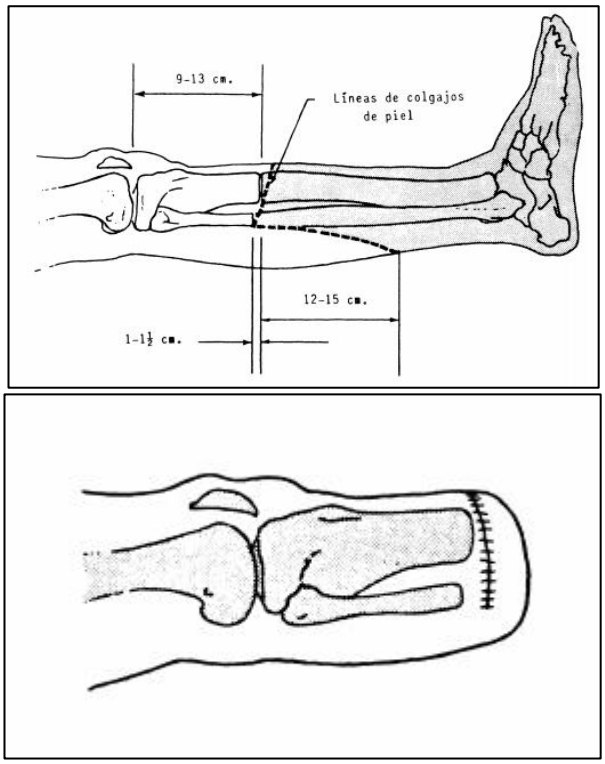
La longitud ideal para amputaciones por debajo de rodilla es de 12 cm y nunca más de 15 cm. Pero la gran mayoría de estos amputados no pueden permanecer con el peso corporal gravitando sobre el extremo del muñón, desde el momento en que la palpación profunda de los tejidos sobre el hueso seccionado causa dolor en éste. Esta es la razón por la que se han buscado sistemas quirúrgicos de desensibilizar el hueso.

La sección tradicional de los músculos en estas amputaciones produce una rápida atrofia de los mismos, debido a la falta del bombeo activo de la contracción del músculo, produciéndose estasis y edema. Para evitar estas complicaciones, los músculos flexores y extensores, incluyendo la musculatura del peroné, son suturados juntos y colocados sobre el puente osteoperióstico de la tibia. De esta forma, los músculos llegan a ser mucho más funcionales y dan origen a un muñón más sano, fuerte y con mejor circulación.

Toda porción de fascia separada de sus músculos subyacentes deberá ser extirpada, dado que, en caso contrario, puede transformarse en una barrera fibrosa que dificultará la penetración de vasos hacia la piel o bien producirá secuestros necróticos.

Se procurará que los colgajos de piel posean la mejor nutrición y circulación posible, para lo cual no se olvidarán —junto a una disección muy cuidadosa— las siguientes indicaciones: Colocar los colgajos de piel directamente sobre músculos que sean altamente funcionales; reducir moderadamente la grasa subcutánea y practicar una sutura limpia evitando tensiones y procurando que la cicatriz no caiga sobre la terminación del hueso.

FIGURA 20. Amputación transtibial



Fuente: **http://www.oandplibrary.org/reference/protesica/**

4.1.2.4 Amputación tipo Syme

Desarrollada en 1842 por JAMES SYME, cirujano escocés, esta amputación se efectúa dejando prácticamente intactas la tibia y el peroné. Consiste en una sección transmaleolar 0,6 cm sobre la superficie articular de tibia y astrágalo.
Los tejidos del talón se preservan para cubrir el muñón, lo que permite al paciente apoyarse directamente en el mismo y soportar su peso facilitando el andar sin prótesis por el interior de la casa. Está indicada en lesiones del pie con pérdida de tejidos en las proximidades de las articulaciones tarsometatarsianas.
Las amputaciones intermedias para salvar mayores áreas no suelen ser eficaces y con frecuencia necesitan reamputación.

Este tipo de amputación no permite lograr una prótesis estética, debido a la dificultad de colocación de mecanismos articulares de tobillo y encaje. Por ello en las mujeres constituye una de las amputaciones de resultados protésicos más antiestéticos. [9]

4.2 TIPOS DE PRÓTESIS

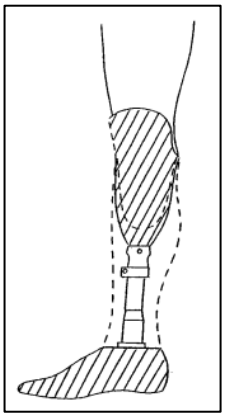
A continuación se describen los tipos de prótesis de miembro inferior, esta información se encuentra en la “Guía descriptiva de Ortoprótesis” del ministerio de Sanidad y Consumo de España.

4.2.1 Prótesis transtibial

Consta de un encaje PTS (Prothèse Tibiale Supracondylenne), en resina laminada o termoplástico rígido, moldeado sobre positivo del muñón, que abarca desde el extremo distal del muñón hasta cubrir en su parte anterior totalmente la rótula, modelando el tendón rotuliano y llegando las paredes laterales por encima de los cóndilos femorales.

El borde posterior está inmediatamente por debajo de la interlínea articular posterior de la rodilla y su contra apoyo se sitúa en el centro proximal de la pared posterior a nivel del hueco poplíteo. En el interior del encaje duro lleva otro blando de espuma de polietileno, gel de silicona u otros materiales similares.
No precisa sistema de suspensión adicional ya que ésta se ejerce por el efecto pinza antero-posterior y medio-lateral del encaje que se produce en determinadas zonas de presión. El extremo distal del encaje se prolonga con un adaptador más un tubo en cuyo extremo se coloca el pie protésico. Todo ello va forrado en gomaespuma y recubierto de tejido tubular [10].

FIGURA 21. Prótesis transtibial



Fuente: **https://www.msssi.gob.es/**

4.2.6 PRÓTESIS DE PIE

- **Pie de eje simple**

El pie de eje simple, proporciona la acción del tobillo por dos topes de caucho que pueden cambiarse para permitir más o menos movimientos según la necesidad del paciente [11].

- **Pie multieje**

Este tipo de prótesis se recomienda para personas que tienen que caminar en superficies desiguales e irregulares porque permite movimiento sobre todas las libertades del tobillo.
Es ligeramente más pesado que los otros tipos de pies y requiere más mantenimiento.

- **Pie SACH**

El pie SACH (solid ankle-cushion heel) “tobillo sólido-talón acolchado”, es el tipo de pie no articulado más simple.
En este pie la quilla es rígida. La acción del tobillo se proporciona por el talón de caucho suave que es comprimido durante la parte temprana de la fase de del caminar. Las cuñas de caucho están disponibles en tres densidades: suave, medio y duro.

- **Pie SAFE**

El pie SAFE (solid ankle-flexible-endoskeletal), “tobillo sólido-parte interna flexible”, tiene la misma acción del SACH más la habilidad que tiene la planta del pie de confrontar superficies ligeramente irregulares (efecto amortiguador) y hace más fácil para el amputado caminar encima de terreno desigual.

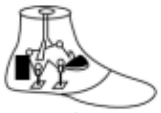
- **Quilla flexible**

Este tipo de prótesis se basa en la absorción de energía. Estos pies acumulan energía en ciertas fases de la marcha para luego ser entregada en las fases en donde el pie despega y se ve más exigido. La idea principal era proporcionar más funcionalidad a atletas amputados, pero los pacientes que son mucho menos activos han encontrado utilidad en estos diseños.

- **Pie no articulado**

Los pies no articulados son los más antiguos y los menos funcionales. Su carácter es más estético que funcional.

Tabla 3. Prótesis de pie

Clase -tipo	Función Básica	Indicación primaria	Ventajas	Limitaciones
Quilla rígida. [g]	simple	Ambulación Limitada o para Máxima duración	Durable y barato	No tiene un uso eficiente De la energía de apoyo Rígido puntera rígida Meramente cosmética
Monocéntrica [h]	Rápido apoyo plantar	Aumenta la Estabilidad de la rodilla	Estabilidad Biomecánica En posturas cercanas al plano medial	Abrupta dorsiflexión en Parada, Hiperextensión de rodilla aumenta el momento de flexión dorsal
 **Policentrica** [i]	Retropié e inversión Eversión rotación Externa y rotación interna	Se adapta a superficies irregulares	Reduce la carga sobre la piel y la prótesis	Incremento de costo, Peso, mantenimiento.
Quilla flexible [j]	Fácil y suave rotación	Facilita la caminata	Confortable y confiable	Limitado empuje incremento De costo
Tipo flex [k]	Empuje dinámico	Incrementa el nivel De actividad	Sentido subjetivo de la capacidad de Respuesta dinámica	incremento en el costo

Fuente: **Bukowski E. Atlas of Amputations and Limb Deficiencies: Surgical, Prosthetic, and Rehabilitation Principles. PHYS THER. 2006; 86:595-596.**

5. MODELADO DE LA MARCHA HUMANA

El estudio de la marcha humana se ha realizado desde ya varias décadas, pero siempre mostrando dificultad al realizar un modelo matemático ya que la morfología de los seres vivos es muy compleja, llevando a los investigadores a realizar aproximaciones geométricas que permitan realizar analogías como la del péndulo invertido o los gráficos de unión.

En este capítulo se desarrolla un modelo *Dinámico* utilizando la metodología de *Euler-Lagrange* la cual está basada en balances de energía. Con este modelo se podrán obtener las ecuaciones de movimiento que permiten conocer los torques (*T*) y las Fuerzas ejercidas (*F*) para realizar el movimiento en la marcha humana.

5.1 METODOLOGÍA EULER-LAGRANGE

En la formulación de *Newton-Euler*, las ecuaciones de movimiento fueron derivadas a partir de la *Segunda Ley de Newton*, la cual relaciona fuerza y momento, así como torque y momento angular. Las ecuaciones resultantes incluyen fuerzas de restricción, las cuales deben ser eliminadas para poder obtener ecuaciones dinámicas de forma cerrada. En la formulación de *Newton-Euler*, las ecuaciones no son expresadas en términos de variables independientes, y no incluyen explícitamente torques de junta de entrada, pues se necesitan operaciones aritméticas para derivar las ecuaciones dinámicas de forma cerrada. Esto representa un complejo procedimiento que requiere cierta intuición física.

Una alternativa al método de *Newton-Euler*, para dinámica de manipuladores, es la formulación de *Lagrange-Euler*, la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema, en vez de las fuerzas y momentos de los miembros individuales involucrados. Las fuerzas de restricción comprometidas en el sistema quedan automáticamente eliminadas en las ecuaciones dinámicas obtenidas por este método. Las ecuaciones dinámicas de forma cerrada pueden ser derivadas sistemáticamente en cualquier sistema de coordenadas [12].

Las ecuaciones obtenidas por la metodología $E - L$ resultan una herramienta necesaria para los casos en los que no se cuenta con gran conocimiento del funcionamiento del sistema, debido a que incluye de manera natural las restricciones, concibe al sistema como un todo y usa funciones escalares para describir las energías cinética y potencial. Además, se basan en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales permiten describir la dinámica en términos de las variables asociadas con los grados de libertad del sistema.

El número de grados de libertad del sistema es igual al número de ecuaciones que se obtienen por esta metodología. Las fuerzas restrictivas en las articulaciones no aparecen en las ecuaciones; por lo tanto, utilizando este método, las fuerzas de

reacción conjuntas no están determinadas. Aunque técnicamente esta metodología es un método alternativo al aproximamiento obtenido por Newton – Euler, no es una nueva teoría, se basa completamente en las leyes de movimiento de Newton, y los resultados del análisis $E - L$ y el método Newtoniano son los mismos para cualquier sistema mecánico. [13]

5.1.1 Características del modelo Euler-Lagrange

La energía es la capacidad de realizar trabajo. La energía cinética de un cuerpo de masa m moviéndose con una velocidad v es un escalar positivo $\mathrm{K} = (\mathrm{mv} \cdot \mathrm{v})/2 = \mathrm{m}v^2/2$. La energía cinética está determinada por los movimientos que el sistema pueda realizar, existen dos tipos de movimiento considerados por la energía cinética; los movimientos rotacionales y los movimientos traslacionales.

Al considerar una cadena cinemática de i- eslabones con movimiento en un espacio tridimensional. La velocidad lineal del CM del eslabón es vi, y su velocidad angular sobre el CM es θi. La energía cinética Ki está dada por

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \dot{\theta}_i^T [I_i] \dot{\theta}_i$$

Donde mi es la masa del eslabón y $[Ii]$ es el tensor de inercia (3 X 3). Todas las variables de la ecuación están representadas en el marco global de referencia de orientación fija. El primer término del lado derecho de la ecuación es llamada la energía cinética traslacional, mientras que el segundo término representa la energía cinética rotacional del eslabón. La expresión para la energía cinética traslacional es análoga a la expresión para la energía cinética de una partícula, $K = \mathrm{m}v^2/2$.

En forma de matriz, la energía cinética rotacional de un eslabón es:

$$k_{rot} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}$$

Donde el origen de las coordenadas en el marco está en el CM. La multiplicación de la ecuación anterior es equivalente a

$$k_{rot} = \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{\theta}_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\theta}_z^2 + \frac{1}{2} I_{xy} \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y + \frac{1}{2} I_{xz} \dot{\theta}_x \dot{\theta}_z + \frac{1}{2} I_{yz} \dot{\theta}_y \dot{\theta}_z$$

Por otro lado, la energía potencial (gravitacional) del eslabón i es igual a la cantidad de trabajo necesaria para elevar el CM, del eslabón desde un plano de referencia hasta su posición actual, $Pi = mighi$, donde hi es la altura del CM del eslabón sobre la superficie de referencia.

La energía potencial total del cuerpo P es igual a la suma de las energías potenciales almacenadas en los eslabones individuales. La energía potencial es una función de la configuración en cadena de los eslabones.

Ahora ya es posible continuar con la descripción del Lagrangiano. El Lagrangiano es una función escalar representada por la letra L, definido como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial P del sistema.

$$L = K - P.$$

Dado que la energía es una cantidad escalar, el Lagrangiano es invariante a las coordenadas de transformación incluyendo la transformación a coordenadas generalizadas. Por lo general, en la biomecánica del movimiento humano, el Lagrangiano es calculado en las coordenadas articuladas.

Por último, las ecuaciones de movimiento en la formulación $E - L$ son:

$$T_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

Donde qi son las coordenadas en las cuales se expresan las energías cinética y potencial. Cuando las coordenadas del eslabón corresponden a los ángulos que forman durante el movimiento, qi tendrá unidades angulares, $\dot{q}i$ será la velocidad angular y Ti representará a los torques que actúan en los ejes de las articulaciones; mientras que si las coordenadas corresponden a los movimientos lineales, qi tendrá unidades de longitud, $\dot{q}i$ será una velocidad lineal y Fi representará la fuerza ejercida para provocar ese movimiento. [13]

En las ecuaciones anteriores se ha introducido el término D, el cual representa la energía disipada por el sistema, lo cual sucede, por ejemplo, cuando hay amortiguadores.

5.2 MODELO DINÁMICO DE LA MARCHA HUMANA

El modelo más usado para representar el cuerpo humano es mediante cadenas cinemáticas, este consiste en eslabones rígidos conectados por juntas de revolución (articulaciones). En este modelo cada segmento del cuerpo es considerado como un eslabón y cada articulación como una junta de revolución. [14]

El modelo a estudiar en este capítulo está formado por cinco eslabones: 1 eslabón UB que representa el tronco (Up Body), 2 eslabones Th que representan los muslos (Thigh) y 2 eslabones Ca que representan las pantorrillas (Calf).

Para el desarrollo del modelo se tienen en cuenta los siguientes supuestos:

- La marcha es realizada en el plano sagital.

- No se tiene energía disipada debida a la fricción o deformación en la articulación.

- Cada segmento tiene un valor de masa determinado localizado como una masa específica en lo que se conoce como centro de masa (CM).

- La ubicación de cada CM permanece fija durante el movimiento del segmento.

- Los momentos de inercia de la masa de cada segmento permanecen constantes durante el movimiento.

- La longitud de cada segmento permanece constante durante el movimiento.

- Los segmentos permanecen rígidos y no se deforman con el movimiento.

- La zona del abdomen y la cadera está formada por un conjunto de 3 sistemas resorte– amortiguador, denominados SDS (*Spring Damping System)*.

-Los SDS que simulan la cadera se mueven en el plano transversal (o plano coordenado XY).

El sistema SDS que une la cadera con el eslabón UB se plantea con un comportamiento especial, este sistema permite movimientos rotacionales sobre los 3 ejes coordenados y un movimiento traslacional a lo largo del eje Z, debido a esto cuenta con 4GDL. Los eslabones RL y LL cuentan con 3GDL, que les permiten 2 movimientos rotacionales alrededor del eje Y, y uno traslacional en plano XY.

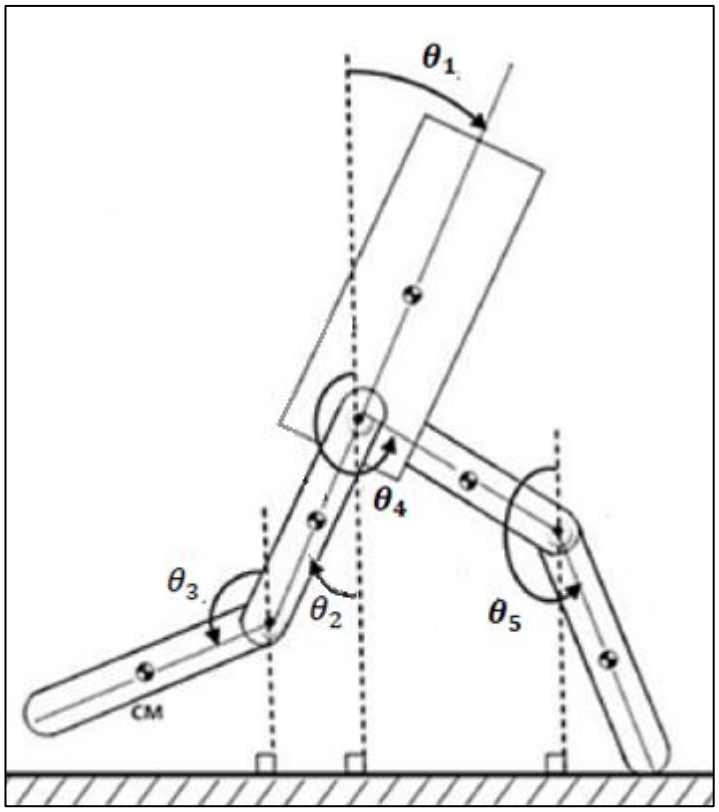
5.2.1 Construcción del Modelo Dinámico

Para la construcción del modelo es necesario dividir la metodología de E- L en 4 fases, las cuales son:

- Calculo de energías cinéticas (k)
- Calculo de energías Potenciales (P)
- Construcción del Lagrangiano (L)
- Solución de las ecuaciones de movimiento de E- L
-

La construcción del modelo dinámico se desarrolla analizando un modelo cinemático de 5 eslabones como se observa en la figura, los cuales serian 1 eslabón UB que representa el tronco (Up Body), 2 eslabones Th que representan los muslos (Thigh) y 2 eslabones Ca que representan las pantorrillas (Calf), adicionalmente se nombra a la pierna derecha RL (right leg) y la pierna izquierda LL (left leg) para las variables. Por otro lado la zona del abdomen y la cadera está formada por un conjunto de 3 sistemas resorte– amortiguador, denominados SDS.

FIGURA 22. Modelo de 5 eslabones del cuerpo humano.



FUENTE: J. C. Cruz Ardila y J. M. Ramírez Escarpeta, «Modelo matemático y herramienta de simulación de exoesqueleto activo de cinco segmentos,» Revista Científica Guillermo de Ocklam, vol. 10, nº 2, pp. 93-105, 2012.

Para la construcción de las ecuaciones del modelo dinámico será necesario utilizar diferentes variables para identificar longitudes, ángulos, velocidades, entre otros, las cuales se definen en la siguiente tabla.

Tabla 4. Variables utilizadas en el modelado de la marcha humana.

VARIABLE	DESCRIPCION	VARIABLE	DESCRIPCION
m_1	Masa UB	k_{1y}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje Y)
m_2	Masa Th de RL	k_{1z1}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje Z)
m_3	Masa Ca de RL	k_{1z2}	Cte. Elástica, UB (mov. trasl. eje Z)
m_4	Masa Th de LL	k_2	Cte. Elástica, RL (mov. horizontal)
m_5	Masa Ca de LL	k_3	Cte. Elástica, LL (mov. horizontal)
l_1	Longitud UB	b_2	Cte. de amortiguamiento RL (mov. horizontal)
l_2	Longitud Th de RL	b_3	Cte. de amortiguamiento LL (mov. horizontal)
l_3	Longitud Ca de RL	b_{1x}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje X)
l_4	Longitud Th de LL	b_{1y}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje Y)
l_5	Longitud Ca de LL	b_{1z1}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje Z)
l_{c1}	Longitud centro de masa UB	b_{1z2}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. trasl. eje Z)
l_{c2}	Longitud centro de masa Th de RL	$\dot{\theta}_{1x}$	Velocidad angular UB en eje X (adelante/atrás)
l_{c3}	Longitud centro de masa Ca de RL	$\dot{\theta}_{1y}$	Velocidad angular UB en eje Y (lados)
l_{c4}	Longitud centro de masa Th de LL	$\dot{\theta}_{1z}$	Velocidad angular UB en eje Z (giro)
l_{c5}	Longitud centro de masa Ca de LL	$\dot{\theta}_2$	Velocidad angular Th de RL
I_1	Inercia UB	$\dot{\theta}_3$	Velocidad angular Ca de RL
I_2	Inercia Th de RL	$\dot{\theta}_4$	Velocidad angular Th de LL
I_3	Inercia Ca de RL	$\dot{\theta}_5$	Velocidad angular Ca de LL
I_4	Inercia Th de LL	$\dot{\delta}_1$	Velocidad traslacional UB (arriba/abajo)
I_5	Inercia Ca de LL	$\dot{\delta}_2$	Velocidad traslacional RL
k_{1x}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje X)	$\dot{\delta}_3$	Velocidad traslacional LL

Variables utilizadas en el modelado dinámico de la marcha humana

5.2.1.1 Cálculo de energías Cinéticas

Para el desarrollo de las ecuaciones de energías cinéticas en cada uno de los eslabones se debe tener en cuenta que la energía cinética total es la suma de las energías cinéticas traslacionales y las energías cinéticas rotacionales.

La energía cinética traslacional está dada por la forma:

$$K_{tras} = \frac{1}{2} m_n v_n^2$$

Donde v es la velocidad del eslabón debida al movimiento vertical al dar los pasos.

Por otro lado la energía cinética rotacional tiene la forma:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_{n_{ij}}^T [I_{n_{ij}}] \dot{\theta}_{n_{ij}}$$

Donde n hace referencia al número del eslabón, y el subíndice ij se refiere a los ejes con respecto de los cuales se lleva el movimiento.

Por lo tanto la energía cinética total es:

$$K_{total} = \frac{1}{2} m_n v_n^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_{n_{ij}}^T [I_{n_{ij}}] \dot{\theta}_{n_{ij}}$$

- **Energía cinética en el eslabón UB (Tronco)**

$$K_{UB} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1_{xx}} \dot{\theta}_{1_x}^2 + \frac{1}{2} I_{1_{yy}} \dot{\theta}_{1_y}^2 + \frac{1}{2} I_{1_{zz}} \dot{\theta}_{1_z}^2 + I_{1_{xy}} \dot{\theta}_{1_x} \dot{\theta}_{1_y} + I_{1_{xz}} \dot{\theta}_{1_x} \dot{\theta}_{1_z} + I_{1_{xy}} \dot{\theta}_{1_x} \dot{\theta}_{1_y} + I_{1_{yz}} \dot{\theta}_{1_y} \dot{\theta}_{1_z}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación hace referencia a la energía cinética traslacional y el restante a la energía cinética rotacional.
Debido a que el eslabón UB cuenta con 3 movimientos rotacionales respecto a cada uno de los ejes cartesianos la energía cinética rotacional contiene los términos xx, yy, zz, xy, xz, yz.

- **Energía cinética en los eslabones RL(right leg) y LL(left leg)**

De igual forma que en el eslabón UB, para los eslabones Th y Ca se observa que la energía cinética es la suma de las energías cinéticas traslacionales y rotacionales. En este caso los movimientos rotacionales sólo son considerados respecto al eje y

$$K_{RL} = K_{Th_{tras}} + K_{Th_{rot}} + K_{Ca_{rot}}$$

$$K_{RL} = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{Th_{RL}}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 v_{Ca_{RL}}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2$$

❖ **Coordenadas generalizadas sobre la localización de los eslabones *Th* y *Ca***

$\boldsymbol{Th_{RL}}$(Muslo Derecho)

- **Posición**

$$x_{Th_{RL}} = (\delta_2 + l_{c2}) cos(\theta_2)$$
$$y_{Th_{RL}} = (\delta_2 + l_{c2}) sen(\theta_2)$$

- **Velocidad**

$$\dot{x}_{Th_{RL}} = -(\delta_2 + l_{c2}) \dot{\theta}_2 sen(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \cos(\theta_2)$$
$$\dot{y}_{Th_{RL}} = (\delta_2 + l_{c2}) \dot{\theta}_2 cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 sen(\theta_2)$$

Ca_{RL}(Pantorrilla Derecha)

- **Posición**

$$x_{Ca_{RL}} = (\delta_2 + l_2)cos(\theta_2) + l_{c3}cos(\theta_3 - \theta_2)$$
$$y_{Ca_{RL}} = (\delta_2 + l_2)sen(\theta_2) + l_{c3}sen(\theta_3 - \theta_2)$$

- **Velocidad**

$$\dot{x}_{Ca_{RL}} = -(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) + \dot{\delta}_2 cos(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3)$$
$$\dot{y}_{Ca_{RL}} = (\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 sen(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3)$$

Como $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, entonces

Velocidad total del eslabón Th_{RL}

$$v_{Th_{RL}}^2 = \left[-(\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) + \dot{\delta}_2 co\,s(\theta_2)\right]^2 + \left[(\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 sen(\theta_2)\right]^2$$

$$v_{Th_{RL}}^2 = (\delta_2 + l_{c2})^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2$$

Velocidad total del eslabón Ca_{RL}

$$v_{Ca_{RL}}^2 = \left[-(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) + \dot{\delta}_2 cos(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3)\right]^2 + \left[(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 sen(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3)\right]^2$$

$$\begin{aligned} v_{Ca_{RL}}^2 = {} & (\delta_2 + l_2)^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + {l_{c3}}^2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 \\ & + 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3) \\ & - 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3) \\ & - 2\dot{\delta}_2 cos(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3) \\ & - 2\dot{\delta}_2 sen(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3) \end{aligned}$$

Después de halladas las velocidades de los eslabones Th y Ca la ecuación de la energía cinética en RL (pierna derecha) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{RL} = {} & \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\delta_2 + l_{c2})^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2\right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2}m_3\left[(\delta_2 + l_2)^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + {l_{c3}}^2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2\right. \\ & + 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3) \\ & - 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3) \\ & - 2\dot{\delta}_2 cos(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)sen(\theta_2 - \theta_3) \\ & \left. - 2\dot{\delta}_2 sen(\theta_2) l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)cos(\theta_2 - \theta_3)\right] + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \end{aligned}$$

Por otro lado la energía cinética en LL (pierna izquierda) queda de la forma:

$$K_{LL} = \frac{1}{2}(m_4 + m_4)\dot{\delta}_3^2 + \frac{1}{2}m_4\left[(\delta_3 + l_{c4})^2\dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2\right] + \frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4$$
$$+ \frac{1}{2}m_5\left[(\delta_3 + l_3)^2\dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2 + {l_{c5}}^2(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)^2\right.$$
$$+ 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 sen(\theta_4)l_{c5}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)sen(\theta_4 - \theta_4)$$
$$- 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 cos(\theta_4)l_{c5}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)cos(\theta_4 - \theta_5)$$
$$- 2\dot{\delta}_3 cos(\theta_4)l_{c5}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)sen(\theta_4 - \theta_5)$$
$$\left. - 2\dot{\delta}_3 sen(\theta_4)l_{c5}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)cos(\theta_4 - \theta_5)\right] + \frac{1}{2}I_5(\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2$$

5.2.1.2 Calculo de energías Potenciales

Después de halladas las energías cinéticas del sistema se procede a construir las ecuaciones para las energías Potenciales en los eslabones.

La energía potencial de cada eslabón es igual a la cantidad de trabajo necesaria para elevar el CM, del eslabón desde un plano de referencia hasta su posición actual, $Pi = mighi$, donde hi es la altura del CM del eslabón sobre la superficie de referencia.

- **Energía Potencial en el eslabón UB (Tronco)**

El CM del eslabón UB tiene energía potencial debido al resorte K1 y debido a la gravedad.

$$P_{UB} = m_1\, gl_{c1}\left(cos(\theta_{1x}) + cos(\theta_{1y}) + cos(\theta_{1z})\right) + m_1\, g(\delta_1 - \delta_0) + \frac{1}{2}\, k_{1x}\theta_{1x}^2 + \frac{1}{2}\, k_{1y}\theta_{1y}^2$$
$$+ \frac{1}{2}\, k_{1z1}\theta_{1z}^2 + \frac{1}{2}\, k_{1z2}\theta_{1z}^2\,, donde\ \delta_0\ \ denota\ al\ punto\ de\ referencia.$$

- **Energía Potencial en los eslabones RL(right leg) y LL(left leg)**

Para los eslabones Th_{RL} y Ca_{RL}la energía potencial está dada por:

$$P_{RL} = -\frac{1}{2}\, k_2\theta_{1z}^2 + m_2 gl_{c2}cos(\theta_2) + m_3 g(l_2 cos(\theta_2) + l_{c3}cos(\theta_3 - \theta_2))$$

Y para los eslabones Th_{LL} y Ca_{LL}la energía potencial está dada por:

$$P_{LL} = -\frac{1}{2}\, k_3\theta_{1z}^2 + m_4 gl_{c4}cos(\theta_4) + m_5 g(l_4 cos(\theta_4) + l_{c5}cos(\theta_5 - \theta_4))$$

5.2.1.3 Construcción del Lagrangiano

El Lagrangiano tiene la forma:

$$L = K_{UB} + K_{RL} + K_{LL} - P_{UB} - P_{RL} - P_{LL}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
L = {} & \frac{1}{2}m_1\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{1_{xx}}\dot{\theta}_{1_x}^2 + \frac{1}{2}I_{1_{yy}}\dot{\theta}_{1_y}^2 + \frac{1}{2}I_{1_{zz}}\dot{\theta}_{1_z}^2 + I_{1_{xy}}\dot{\theta}_{1_x}\dot{\theta}_{1_y} + I_{1_{xz}}\dot{\theta}_{1_x}\dot{\theta}_{1_z} + I_{1_{xy}}\dot{\theta}_{1_x}\dot{\theta}_{1_y} \\
& + I_{1_{yz}}\dot{\theta}_{1_y}\dot{\theta}_{1_z} + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\delta_2 + l_{c2})^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2\right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2 \\
& + \frac{1}{2}m_3\left[(\delta_2 + l_2)^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + {l_{c3}}^2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2\right. \\
& + 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 sen(\theta_2)l_{c3}\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3\right)sen(\theta_2 - \theta_3) \\
& - 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 cos(\theta_2)l_{c3}\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3\right)cos(\theta_2 - \theta_3) \\
& - 2\dot{\delta}_2 cos(\theta_2)l_{c3}\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3\right)sen(\theta_2 - \theta_3) \\
& \left. - 2\dot{\delta}_2 sen(\theta_2)l_{c3}\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3\right)cos(\theta_2 - \theta_3)\right] + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2}(m_4 + m_4)\dot{\delta}_3^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4\left[(\delta_3 + l_{c4})^2\dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2\right] + \frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4 \\
& + \frac{1}{2}m_5\left[(\delta_3 + l_3)^2\dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2 + {l_{c5}}^2(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)^2\right. \\
& + 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 sen(\theta_4)l_{c5}\left(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5\right)sen(\theta_4 - \theta_4) \\
& - 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 cos(\theta_4)l_{c5}\left(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5\right)cos(\theta_4 - \theta_5) \\
& - 2\dot{\delta}_3 cos(\theta_4)l_{c5}\left(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5\right)sen(\theta_4 - \theta_5) \\
& \left. - 2\dot{\delta}_3 sen(\theta_4)l_{c5}\left(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5\right)cos(\theta_4 - \theta_5)\right] + \frac{1}{2}I_5(\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\
& - \left[m_1\, gl_{c1}\,\left(cos(\theta_{1x}) + cos\left(\theta_{1y}\right) + cos(\theta_{1z})\right) + m_1\, g(\delta_1 - \delta_0) + \frac{1}{2}\, k_{1x}\theta_{1x}^2\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\, k_{1y}\theta_{1y}^2 + \frac{1}{2}\, k_{1z1}\theta_{1z}^2 + \frac{1}{2}\, k_{1z2}\theta_{1z}^2\right] \\
& - \left[-\frac{1}{2}\, k_2\theta_{1z}^2 + m_2 gl_{c2}cos(\theta_2) + m_3 g(l_2 cos(\theta_2) + l_{c3}cos(\theta_3 - \theta_2))\right] \\
& - \left[-\frac{1}{2}\, k_3\theta_{1z}^2 + m_4 gl_{c4}cos(\theta_4) + m_5 g(l_4 cos(\theta_4) + l_{c5}cos(\theta_5 - \theta_4))\right]
\end{aligned}$$

5.2.1.4 Ecuaciones de Euler- Lagrange (E-L)

- **Torques y fuerzas en el eslabón UB (tronco)**

$$u_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1_x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1x}} = I_{1_{xx}}\ddot{\theta}_{1x} + b_{1x}\dot{\theta}_{1_x} + k_{1x}\theta_{1x} + m_1\, gl_{c1}sen(\theta_{1x})$$

$$u_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1_y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1y}} = I_{1_{yy}}\ddot{\theta}_{1y} + b_{1y}\dot{\theta}_{1_y} + k_{1y}\theta_{1y} + m_1\, gl_{c1}sen(\theta_{1y})$$

$$u_3 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1_z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1z}} = I_{1_{zz}}\ddot{\theta}_{1z} + b_{1z1}\dot{\theta}_{1_{z1}} + k_{1z1}\theta_{1z} + m_1\, gl_{c1}sen(\theta_{1z})$$

$$u_4 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = m_1\ddot{\delta}_1 + b_{1z2}\dot{\delta}_1 + k_{1z2}\delta_1 + m_1 g$$

- **Torques y fuerzas en el eslabón RL (pierna derecha)**

$$\begin{aligned}
u_5 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\
&= [m_2(\delta_2 + l_{c2})^2 + m_3(\delta_2 + l_2)^2 + m_3 l_{c3}^2 - 2m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)cos(2\theta_2 - \theta_3) \\
&+ I_2]\ddot{\theta}_2 + [-m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3]\ddot{\theta}_3 \\
&+ [-m_3 l_{c3} sen(2\theta_2 - \theta_3)]\ddot{\delta}_2 + [4m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_2^2 \\
&+ [-4m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\
&+ [2m_2(\delta_2 + l_{c2}) + 2m_3(\delta_2 + l_2) - 2m_3 l_{c3}cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2\dot{\theta}_2 \\
&+ [2m_3 l_{c3}cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2\dot{\theta}_3 + [m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_3^2 \\
&- m_2 l_{c2} g sen(\theta_2) - m_3 l_2 g sen(\theta_2) - m_3 l_{c3} g sen(\theta_2 - \theta_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_6 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \\
&= [-m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3]\ddot{\theta}_2 + [m_3 l_{c3}^2 + I_3]\ddot{\theta}_3 \\
&+ [m_3 l_{c3} sen(2\theta_2 - \theta_3)]\ddot{\delta}_2 \\
&+ [-2m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(2\theta_2 - \theta_3) - m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(\theta_3)]\dot{\theta}_2^2 \\
&+ [2m_3 l_{c3}cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2\dot{\theta}_2 + [-2m_3 l_{c3}cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2\dot{\theta}_3 \\
&+ [m_3 l_{c3}(\delta_2 + l_2)sen(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} g sen(\theta_2 - \theta_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_7 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} \\
&= [-m_3 l_{c3} sen(2\theta_2 + \theta_3)]\ddot{\theta}_2 + [m_3 l_{c3} sen(2\theta_2 + \theta_3)]\ddot{\theta}_3 + [2(m_2 + m_3)]\ddot{\delta}_2 \\
&+ [-m_3 l_{c3} cos(2\theta_2 + \theta_3) - (m_2 + m_3)\delta_2 - m_2 l_{c2} - m_3 l_2]\dot{\theta}_2^2 \\
&+ [-m_3 l_{c3} cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3^2 + [2m_3 l_{c3} cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + b_2\dot{\delta}_2 - k_2\delta_2
\end{aligned}$$

- **Torques y fuerzas en el eslabón LL (pierna izquierda)**

$$u_8 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4}$$
$$= [m_4(\delta_3 + l_{c4})^2 + m_4(\delta_3 + l_4)^2 + m_5 l_{c5}^2 - 2m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)cos(2\theta_4 - \theta_5)$$
$$+ I_4]\ddot{\theta}_4 + [-m_5 l_{c5}^2 + m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5]\ddot{\theta}_5$$
$$+ [-m_5 l_{c5} sen(2\theta_4 - \theta_5)]\ddot{\delta}_3 + [4m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_4^2$$
$$+ [-4m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5$$
$$+ [2m_4(\delta_3 + l_{c4}) + 2m_5(\delta_3 + l_4) - 2m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_4$$
$$+ [2m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_5 + [m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_5^2$$
$$- m_4 l_{c4} g sen(\theta_4) - m_5 l_4 g sen(\theta_4) - m_5 l_{c5} g sen(\theta_4 - \theta_5)$$

$$u_9 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_5}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_5}$$
$$= [-m_5 l_{c5}^2 + m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5]\ddot{\theta}_4 + [m_5 l_{c5}^2 + I_5]\ddot{\theta}_5$$
$$+ [m_5 l_{c5} sen(2\theta_4 - \theta_5)]\ddot{\delta}_3$$
$$+ [-2m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(2\theta_4 - \theta_5) - m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(\theta_5)]\dot{\theta}_4^2$$
$$+ [2m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_4 + [-2m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_5$$
$$+ [m_5 l_{c5}(\delta_3 + l_4)sen(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 - m_5 l_{c5} g sen(\theta_4 - \theta_5)$$

$$u_{10} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_3}$$
$$= [-m_5 l_{c5} sen(2\theta_4 + \theta_5)]\ddot{\theta}_4 + [m_5 l_{c5} sen(2\theta_4 + \theta_5)]\ddot{\theta}_5 + [2(m_4 + m_5)]\ddot{\delta}_3$$
$$+ [-m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 + \theta_5) - (m_4 + m_5)\delta_3 - m_4 l_{c4} - m_5 l_4]\dot{\theta}_4^2$$
$$+ [-m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5^2 + [2m_5 l_{c5} cos(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + b_3\dot{\delta}_3 - k_3\delta_3$$

5.3 SIMULACIÓN DEL MODELADO

Después de realizado el modelado de la marcha humana y obtener las ecuaciones de movimiento por la metodología E-L se procede a realizar la simulación en Matlab, donde se puede observar el desplazamiento, velocidad y aceleración lineal y angular de la pierna derecha (RL).

5.3.1 Código Matlab

Para realizar la simulación se utilizará la función ODE45 de Matlab, la cual permite resolver ecuaciones diferenciales, en este caso de segundo orden, utilizando métodos numéricos (Método de Runge Kutta).

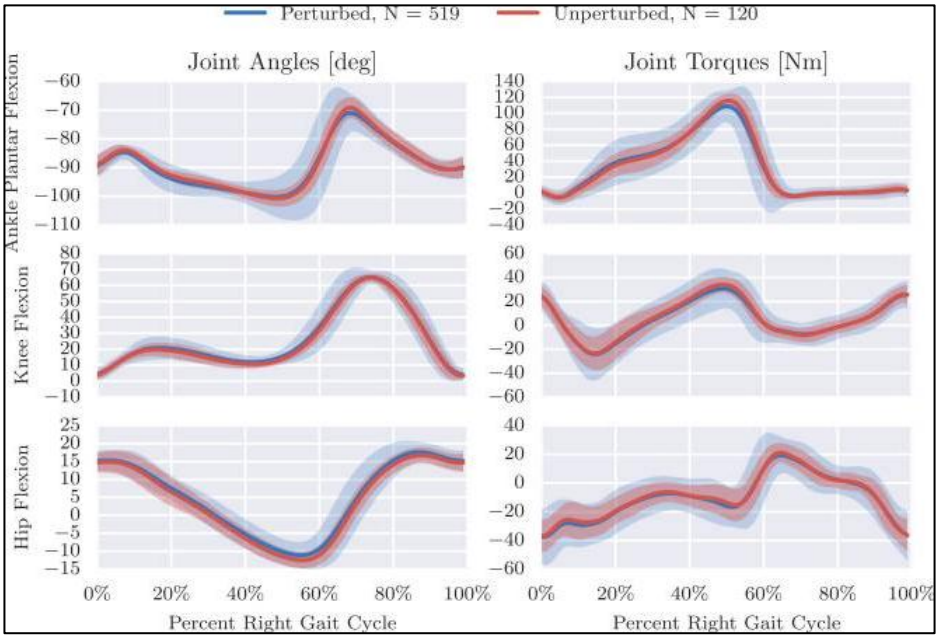
Para el inicio de la simulación se utilizan las ecuaciones de movimiento U5, U6, U7 que hacen referencia a los movimientos de la pierna derecha en la marcha humana.

De estas ecuaciones es necesario hacer el despeje de $\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\delta}_2$ ya que son las variables de mayor orden y posteriormente utilizadas en la función ODE45 de Matlab. En el anexo A de podrá encontrar todo el código utilizado para el despaje de variables

Después de realizado el despeje de las variables de mayor orden se procede a analizar las condiciones iniciales para la posterior implementación del ODE45. El código implementado se puede observar en el anexo B.

Las condiciones iniciales fueron tomadas de "An elaborate data set on human gait and the effect of mechanical perturbations" [15], donde se observa en graficas de desplazamiento angular y los torques aplicados de la pierna derecha en la marcha humana.

FIGURA 23. Desplazamiento angular y torques



FUENTE: An elaborate data set on human gait and the effect of mechanical perturbations.

Al analizar las gráficas anteriores se observa que los valores iniciales de los torques en la articulación de la cadera-muslo y rodilla son -40[Nm] y 22[Nm] que para este caso de estudio seria U5 y U6 respectivamente. Por otro lado las posiciones angulares iniciales son $\frac{\pi}{12}$ y $-\frac{\pi}{2}$ que hacen referencia a θ_2 y θ_3 respectivamente.

Las condiciones iniciales para el desplazamiento lineal, velocidad lineal y velocidades angulares serán 0 en todos los casos.

Los valores de las inercias, longitudes, masas y constantes de amortiguación fueron tomadas de [16], donde la base de las mediciones fue un hombre de 85 Kg y 1,83 m de estatura.

Tabla 5. Valores Variables

VALORES VARIABLES									
m_2 $[kg]$	m_3 $[kg]$	l_2 $[m]$	l_{c2} $[m]$	l_{c3} $[m]$	$I_2[kgm^2]$	$I_3[kgm^2]$	k_2 $[N/m]$	b_2 $[N*s/m]$	$g[m/s^2]$

8.5	5.185	0.54	0.233	0.207	500	3	0.9	0.9	9.81

5.3.1.1 Implementación ODE45 Matlab

Después de obtener todos los valores de las variables y los valores de las condiciones iniciales, se procede a implementar el ODE45 en Matlab con las ecuaciones anteriormente despejadas.

El código completo de la implementación del ODE45 se puede observar en el anexo 2.

5.3.2 Gráficas Simulación

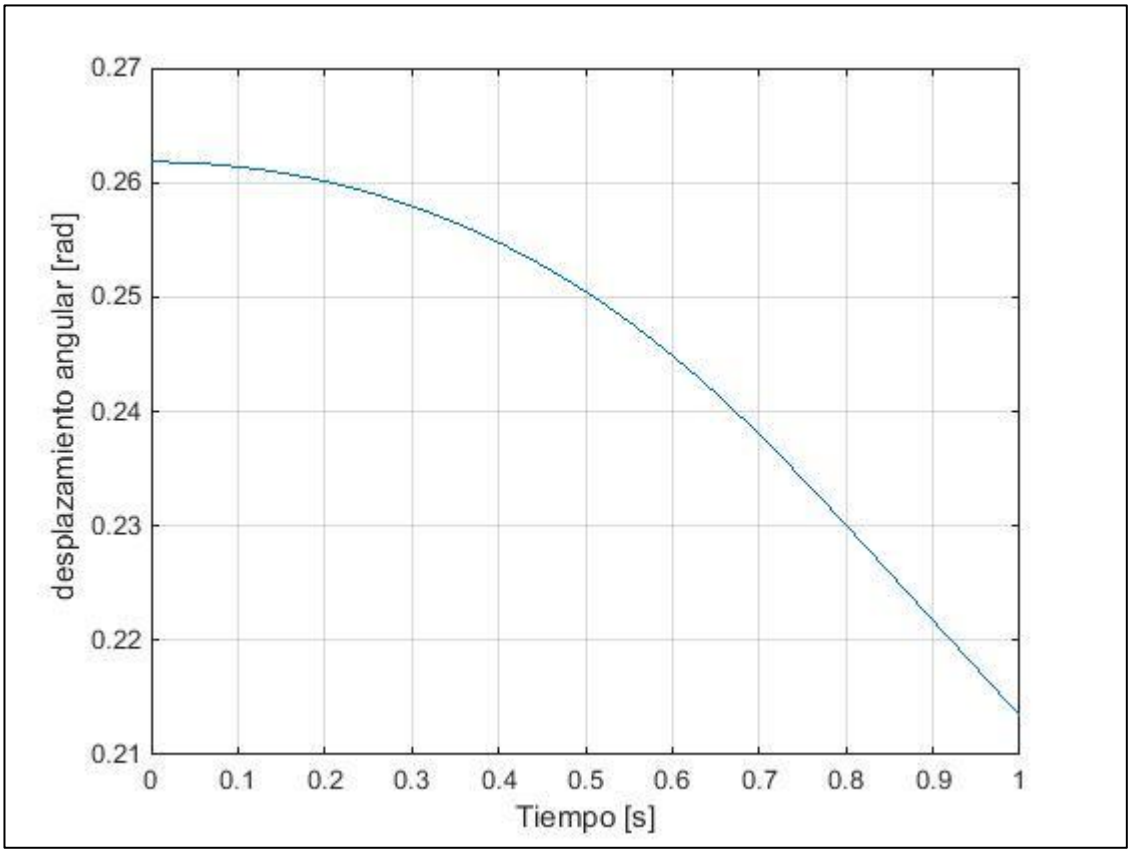
Después de implementado el ODE45, Matlab permite observar las gráficas de desplazamiento y velocidades lineales y angulares.

El código implementado permite observar la simulación en un intervalo de tiempo de 1 segundo ya que los torques y fuerzas aplicadas en la simulación son constantes, al simular en un tiempo mayor a este los resultados no serán reales ya que en la marcha humana los torques y fuerzas aplicadas son variantes en el tiempo.

Como se describió anteriormente las condiciones iniciales para la simulación son los puntos de apoyo doble en la marcha, donde un instante después el pie derecho despega del suelo.

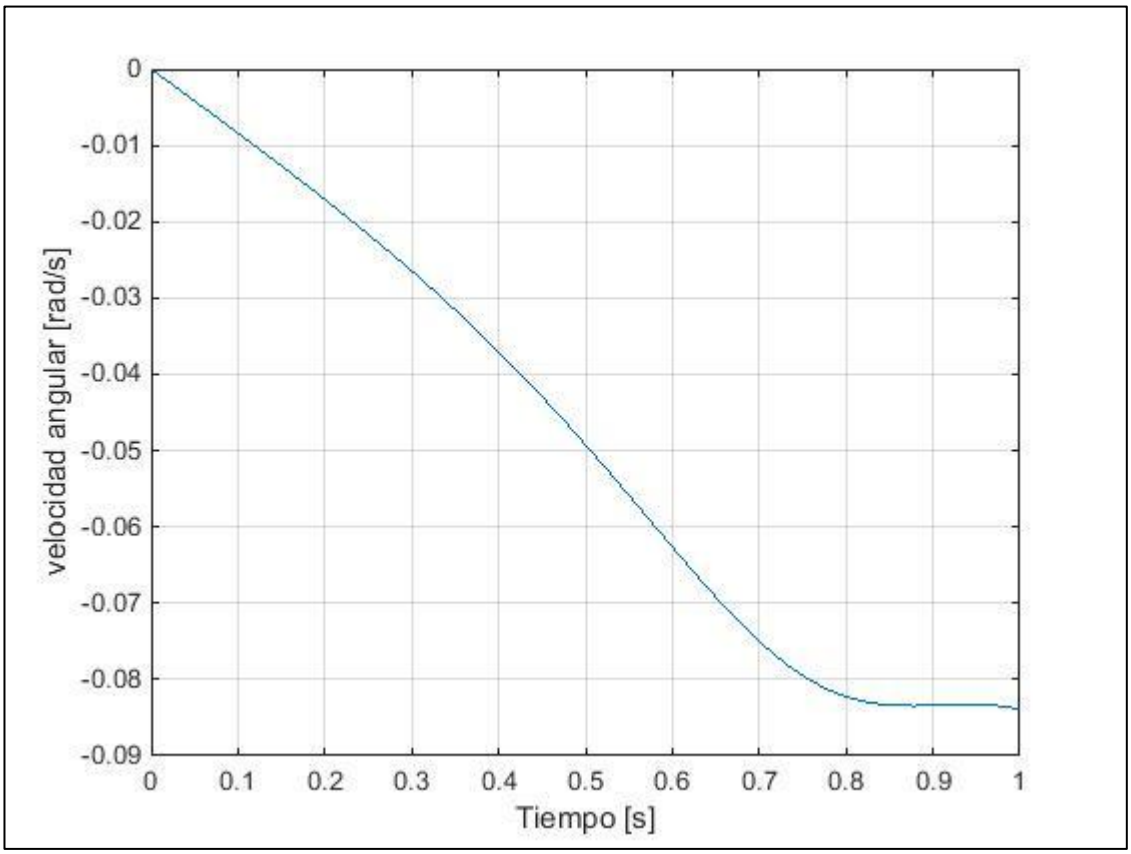
- **DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD ANGULAR**

FIGURA 24. Desplazamiento angular muslo



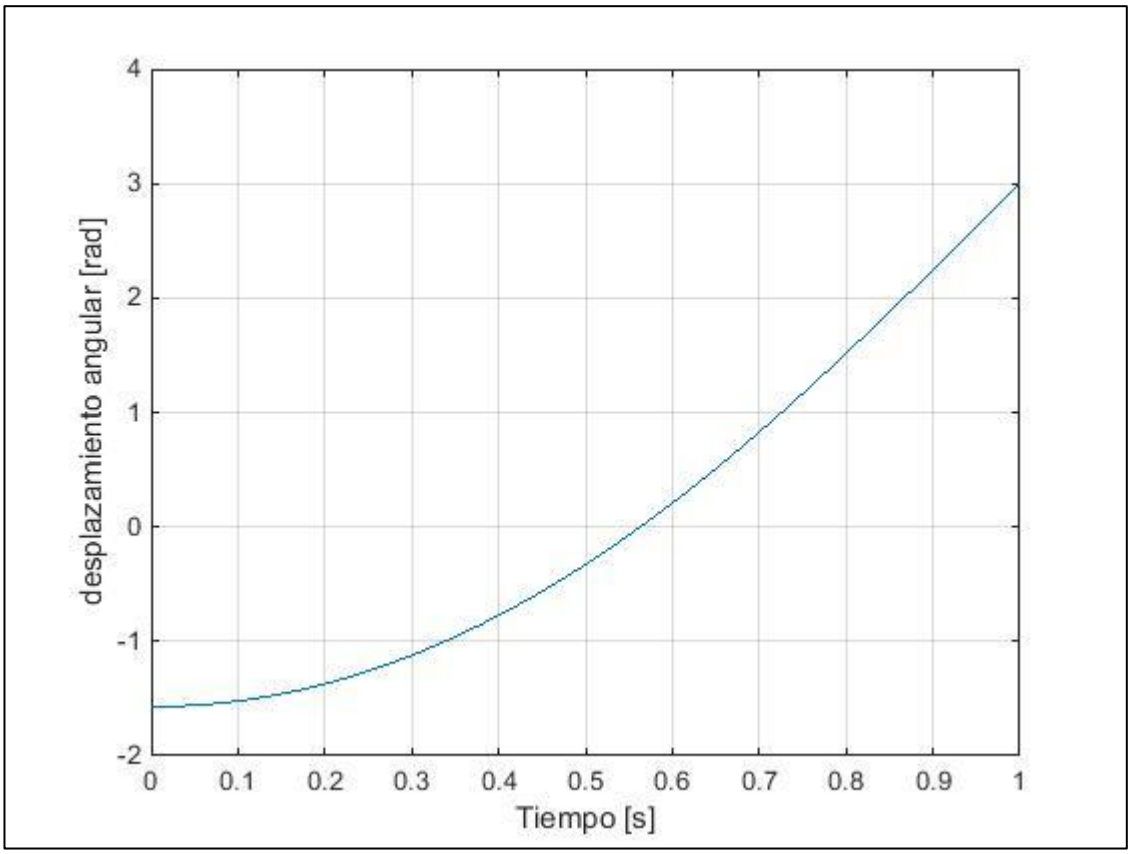
En la figura 24 se observa que al iniciar la marcha el muslo se encuentra en 0.26 rad (aproximadamente 15°) con respecto al eje vertical y pasado un segundo, lo que corresponde a la finalización de un paso, el muslo se encuentra a 0,21 rad (aproximadamente 12°). Esto permite inferir que el desplazamiento realizado por el muslo no es muy extenso y que intenta mantener una misma amplitud a lo largo de un paso en la marcha normal. En la figura 22 se puede observar el desplazamiento del muslo cómo (θ_2)

FIGURA 25. Velocidad Angular muslo



Al iniciar la marcha en la fase de apoyo doble, el muslo tiene una velocidad inicial de 0 rad/s, en el transcurso del paso la pierna derecha está en fase de oscilación llevando al muslo a una velocidad máxima de 0,82 rad/s. Al acercarse la finalización de la fase oscilatoria de la pierna, alrededor de los 0,8 segundos, el muslo empieza a desacelerar para llegar a la fase de apoyo monopodal. Esta velocidad angular corresponde a ($\dot{\theta}_2$).

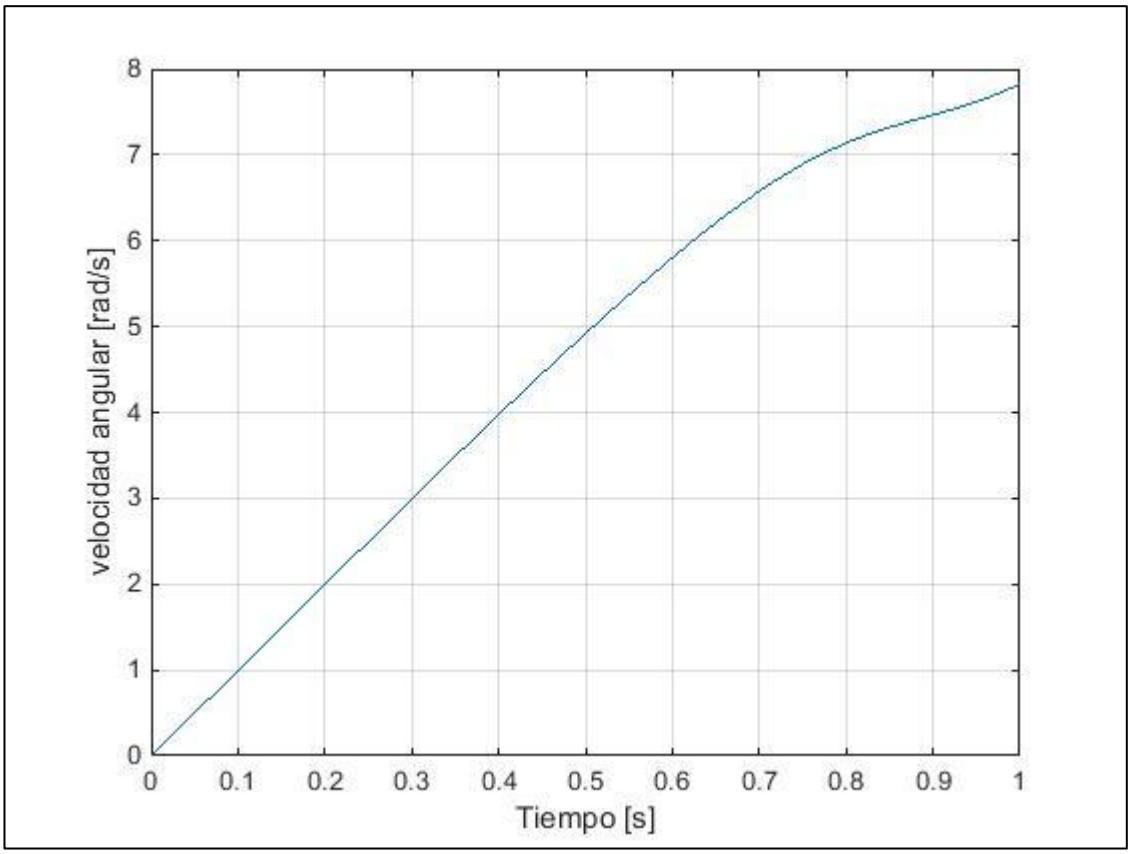
FIGURA 26. Desplazamiento angular pantorrilla



Al iniciar el paso en la fase de apoyo doble la pantorrilla se encuentra en -1,7 rad (aproximadamente -97°) con respecto al aje vertical, esta magnitud negativa es debido a que la pierna derecha antes de iniciar la fase oscilatoria se encuentra a la izquierda del eje vertical del cuerpo, al transcurrir el paso se observa que la pantorrilla se desplaza hasta llegar a una amplitud máxima de 3 rad (aproximadamente 171°) donde finalizara la fase oscilatoria.

Al comparar la figura 24 y la figura 26 se observa que el desplazamiento realizado por la pantorrilla es mucho mayor al desplazamiento realizado por el muslo debido a que la pantorrilla genera desplazamientos en el eje negativo para evitar choques con el suelo al caminar y al mismo tiempo tener una mejor liberación de energía. El desplazamiento realizado por la pantorrilla se puede observar en la figura 22 como (θ_3)

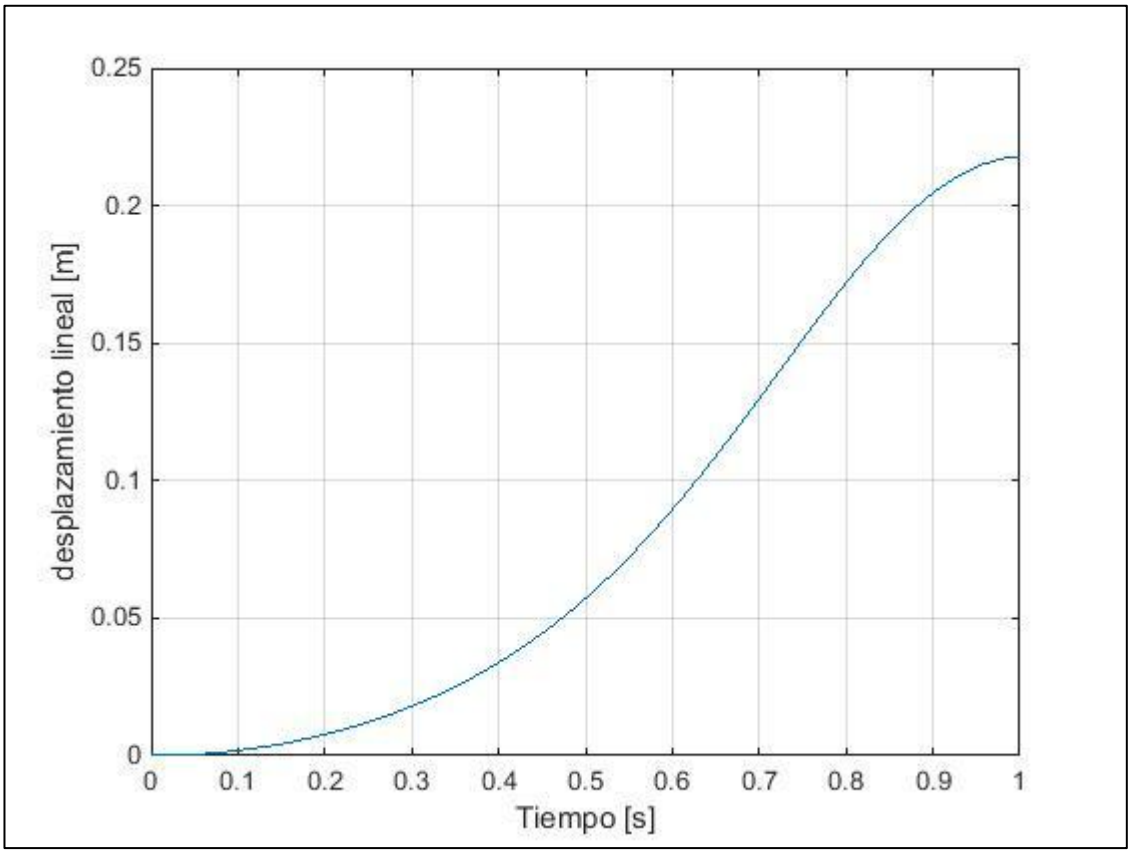
FIGURA 27. Velocidad angular pantorrilla



En la figura 27 se observa, cómo ha de esperarse, que la velocidad inicial de la pantorrilla es de 0 rad/s al iniciar el paso ya que se encuentra en fase de apoyo doble donde la pierna derecha iniciara el despegue del pie.
Al transcurrir el paso en la fase oscilatoria se observa que la velocidad angular es ascendente tomando valores positivos hasta llegar a una magnitud máxima de 7,8 rad/s donde finaliza el paso.
Se puede observar que la velocidad de la pantorrilla es mucho mayor a la del muslo, como se observa en la figura 25 el muslo llega a tener una velocidad angular máxima de 0,82 rad/s, estos es debido a que la pantorrilla debe recorrer una mayor distancia angular en el mismo tiempo.
La velocidad angular de la pantorrilla corresponde a ($\dot{\theta}_3$).

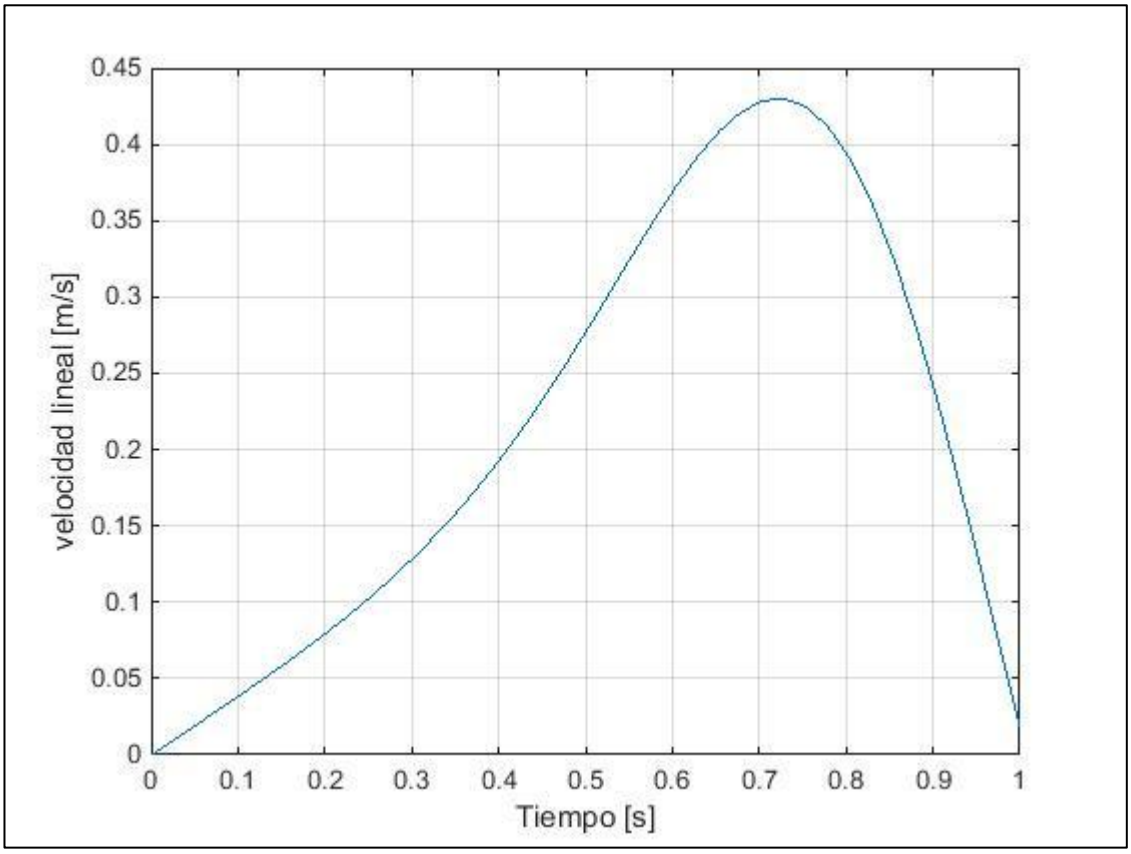
- **DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD LINEAL**

FIGURA 28. Desplazamiento lineal pierna derecha



Al iniciar la marcha en la fase de apoyo doble la pierna no ha recorrido ninguna distancia lineal, por lo tal en la gráfica se observa que el punto inicial es 0 metros, al transcurrir la fase oscilatoria y finalizar el paso, la pierna derecha se encuentra a 23 cm de distancia de su punto de partida.
El desplazamiento lineal se puede observar en las ecuaciones como δ_2.

FIGURA 29. Velocidad lineal pierna derecha



En la figura 29 se observa que al iniciar la marcha, la pierna se encuentra en estado de reposo por tal hay una velocidad inicial de 0 m/s. A los 0,71 segundos aproximadamente, cuando la pierna se encuentra en fase oscilatoria, esta llega a una velocidad máxima de 0,43 m/s y empieza a desacelerar para terminar el paso y llegar a la fase de apoyo monopodal.
La velocidad lineal corresponde a $\dot{\delta}_2$ en las ecuaciones.

5.3.3 Análisis de resultados

- El modelo planteado es muy sensible a variaciones en sus condiciones iniciales, ya que la de estas puede generar resultados no deseados y distantes a los observados anteriormente.

- Debido al código utilizado y a la complejidad del modelo planteado se genera una restricción al momento de simular, ya que solo se pueden observar resultados reales en un intervalo de tiempo de 1 segundo.

6. MATERIALES PROTÉSICOS

Las prótesis existen desde tiempos remotos y estos descubrimientos han permitido tener conocimiento de las prácticas ortopédicas que se utilizaban en la antigüedad.
En los descubrimientos hechos se ha observado las técnicas utilizadas y los materiales de fabricación de las prótesis, que son de excelente calidad, ya que a pesar del tiempo transcurrido siguen en buen estado y sin descomposición alguna.

En la antigüedad los elementos más comunes en la fabricación de prótesis eran bambú, caña, madera, cortezas de árbol o almohadillas con lienzo, pero gracias a la ciencia se han introducido diferentes materiales como polímeros y metales que ayudan a un diseño más óptimo y cómodo para el amputado.

6.1 BIOMATERIALES

Un biomaterial es una sustancia biocompatible, natural o sintética, o combinación de sustancias que puestas en contacto con los tejidos vivos o los fluidos biológicos, no afectan de forma adversa a los constituyentes biológicos del conjunto del organismo.

Un biomaterial se considera que es aquel material diseñado para actuar interfacialmente con sistemas biológicos con el fin de evaluar, tratar, aumentar o sustituir algún tejido, órgano o función del cuerpo.
La biocompatibilidad se define como la tolerancia biológica local de un determinado material, manifestada por la ausencia de respuesta inflamatoria aguda o crónica, o por su incorporación durante un período de tiempo tras su implantación, así como la ausencia de efectos deletéreos sobre tejidos distantes al lugar de implantación. [17]

Los metales empezaron a emplearse como biomateriales en el siglo XVI. Petronius, en el año 1565, diseño una lámina de oro para corregir una hendidura de paladar. En el año 1775 Lapeyode y Sicre utilizaron un alambre para reparar una fractura ósea.
Hasta el siglo XVIII, los implantes quirúrgicos utilizados se fabricaban con oro y plata, ya que los científicos de esta época consideraban que poseían propiedades antisépticas y se podrían prevenir las infecciones en el ser humano al ser implantados.
A mediados del siglo XX se empezaron a utilizar diferentes materiales y aleaciones para crear piezas quirúrgicas y prótesis. Esto se generó debido a la segunda guerra mundial, que impulso a los avances médicos y científicos para la rehabilitación de los heridos de guerra.

Actualmente los biomateriales han tenido un desarrollo muy amplio ya que se han creado materiales “inteligentes”, pero estos materiales en ocasiones no son biocompatible con el ser humano y el cuerpo genera rechazos al utilizarlos, lo cual produce alteraciones cutáneas si se hablar de prótesis, o infecciones y alteraciones biológicas si se habla de implantes invasivos.

Muchas empresas han llevado sus inversiones a la investigación de los biomateriales y se han desarrollado materiales diferentes a los de alto riesgo para así mejorar el rendimiento a largo plazo de estos. Por otro lado estas investigaciones buscan crear estándares adecuados que permitan comparar y establecer equivalencias con los materiales alternativos, y por supuesto analizar el alto costo del proceso de

fabricación, ya que estas investigaciones están ligadas al desarrollo e inversión que realiza un país en el sector y sistema de la salud. Como consecuencia de los altos costos de algunos biomateriales se hace inaccesible para muchos pacientes el tratamiento óptimo para su recuperación.

6.1.1 Propiedades de los biomateriales

Scales en el año 1953 determinó las principales propiedades que debe tener un implante, que por orden de importancia, son:

Cuando el implante se pone en contacto con los tejidos del cuerpo humano produce una reacción inflamatoria inicial para continuar después un proceso de cicatrización. En este proceso pueden producirse reacciones normales de fibrosis (cápsulas fibróticas) que muy probablemente irán desapareciendo con el tiempo. Cuando la reacción es prolongada, pero de mínimo impacto, es posibles observar, por microscopía de los tejidos, presencia de fagocitos y fibroblastos, donde se puede originar granulomas en algunos casos.

Hay dos clases de corrosión en los materiales quirúrgicos: la corrosión bajo tensión y la corrosión fatiga, que se producen, respectivamente, cuando el material está sometido a tensiones mecánicas externas de tipo estático y cuando está sometido a tensiones cíclicas.

Cuando un material es biocompatible, no se origina toxicidad en el organismo, ni se produce degradación del material por el mismo. La biocompatibilidad no producirá reacción inflamatoria del organismo, reacción alérgica ni reacciones sistemáticas por difusión de iones.

El organismo humano no acepta cualquier tipo de material para su implantación, y por ello, resulta necesaria la realización de test de biocompatibilidad entre el material y el usuario. En el momento que se diseña y se establece el implante o prótesis, hay que tener en cuenta las características del paciente en función de la calidad del hueso, músculos, nervios, la edad y la actividad diaria que realiza para desarrollar el dispositivo más óptimo.

La biofuncionalidad es la adecuación entre un material y su aplicación clínica y la respuesta tisular es la que manifiestan los tejidos ante la presencia de un cuerpo extraño. Esta respuesta puede ser desde una mínima inflación hasta una reacción alérgica severa en el caso de las prótesis.

Las propiedades que caracterizan a un biomaterial son: elasticidad, plasticidad, ductilidad, maleabilidad, dureza, fragilidad, tenacidad, fatiga y resistencia.
La resistencia a la ruptura será tanto mayor cuanto menor sea su fragilidad, mientras que la elasticidad es la capacidad de recuperar su forma original al ceder las fuerzas que la han deformado. La resistencia a la fatiga es la capacidad de soportar deformaciones variables sin llegar a la fractura del material. Se entiende por desgaste la perdida de las superficies sólidas como resultado de una acción mecánica. [18]

6.1.2 Principales biomateriales

Se debe analizar los principales biomateriales que se usan en traumatología para tener un conocimiento amplio de cuales de estos tienen las mejores características para la fabricación de una prótesis.

6.1.2.1 Acero inoxidable

El acero utilizado en medicina es el denominado acero de “grado medico” y es una aleación de hierro, cromo, níquel y molibdeno en proporciones bien definidas (62,5% - 17,5% - 14,5% y 2,8%) asociados a otros componentes en menor proporción. El contenido en cromo superior al 12% garantiza la resistencia a la corrosión.

Hay cuatro tipos de acero inoxidable, según su composición química: [19]

- Aceros inoxidables martensíticos, cuya proporción de cromo está entre 11,5% y 18%. Su característica principal es su magnetismo. Su dureza depende del contenido de carbono.

- Aceros inoxidables ferríticos que contienen entre un 14% y un 27% de cromo y cuyo contenido en carbono es muy bajo. Son magnéticos y por ellos se utilizan menos en medicina.

- Aceros inoxidables austeníticos (316 y 316L) con hierro (60%), cromo (20%), níquel (15%), molibdeno (3%) y también manganeso y carbono en pequeñas cantidades. Resiste mejor la corrosión que los nombrados anteriormente.

- Aceros inoxidables endurecibles por precipitación. Tienen un menor contenido de níquel y en su composición pueden estar también presente el titanio y el aluminio.

6.1.2.2 Aleaciones con base de cobalto

Son conocidas como aleaciones de cromo-cobalto, llamado vitalio, y pueden ser de dos tipos: las de cobalto (60%), cromo (30%) y molibdeno (7%) (Co-Cr-Mo) y las de cobalto, níquel, cromo y molibdeno (Co-Ni-Cr-Mo). El molibdeno se añade para obtener un grano más fino y de ese modo conseguir una mayor resistencia después de moldear o forjar la prótesis. Es una aleación con altas propiedades mecánicas, gran resistencia a la fatiga de materiales, a la corrosión galvánica y al agrietamiento.

6.1.2.3 Titanio

Las características que hacen al titanio un biomaterial es su naturaleza paramagnética, esto es, que no se imanta como consecuencia de su estructura electrónica, siendo, además, muy resistente a la corrosión y a la tracción. Asimismo, dado que puede formar aleaciones con otros elementos, puede aumentar sus prestaciones mecánicas.

El titanio es un material inerte, y puesto que su cubierta de óxido en contacto con los tejidos es insoluble, no es posible librera iones que reaccionen con las moléculas orgánicas del ser humano.

Dada su menor densidad, los implantes de titanio pesan alrededor de un 45% menos que los implantes de acero y de cobalto, lo cual aumenta la comodidad del paciente, especialmente en fijaciones largas. Su bajo módulo de elasticidad es otra ventaja, ya que minimiza la protección contra la presión y ésta se transfiere al hueso.

No se puede utilizar como material para superficies articulares ya que puede producir metalosis y tampoco se puede cementar por su escasa resistencia al rozamiento pero si utilizar como prótesis no cementada. [18]

6.1.2.4 Tantalio

El tantalio es un metal sólido de transición de color azul grisáceo, con brillo metálico y con una buena resistencia a la corrosión. Tiene, además, un alto grado de dureza, elasticidad, y una alta porosidad volumétrica.

Se obtiene a partir del mineral tantalio y es fisiológicamente inerte, lo cual le convierte en un material idóneo para la fabricación de implantes quirúrgicos con biomaterial para artroplatias.
En la fabricación de implantes se asocia con titanio o aleaciones de cromo cobalto.

6.1.2.5 Cerámicas

Las cerámicas son materiales sólidos y policristalinos con enlaces de naturaleza iónico-covalente lo que les confiere alta resistencia a la corrosión y al calor, así como una muy elevada resistencia mecánica. Su contrapartida es la alta fragilidad que presentan. Fueron introducidas por Hench en al año 1971.

Existen dos tipos de cerámica: las bioinertes que están compuestas por óxidos o por materiales carbonados y las bioactivas que tienen fosfato cálcico en su composición. [20]

6.1.2.6 Polímeros de síntesis

Los polímeros con los que se trabaja actualmente son el ácido poliglicólico, al ácido polilíctico, la polidioxanona y el poligliconato. La fabricación de poliésteres y polímeros de elevado peso molecular, y cuyo aspecto es granuloso, blanco y amorfo, se realiza a partir de monómeros cíclicos. Con el paso del tiempo, el polímero de degrada en el cuerpo en ácido láctico por el proceso de hidrólisis. El ácido láctico acaba metabolizándose completamente e CO_2 y H_2O, durante el ciclo del ácido cítrico.

Existen tres tipos fundamentales de polímeros que se utilizan en el campo de la medicina: los polímeros por policondensación como es la poliamida; los polímeros por

polimerización en cadena, como el polietileno y, los polímeros obtenidos por polimerización por transferencia de grupos.

En el caso del polietileno la polimerización se realiza a partir de resina de polietileno por un proceso de calentamiento y presurización. El polietileno (UHMW) es el que se utiliza actualmente y tiene un peso molecular de 3.000.000 lo cual le confiere una alta densidad que aumenta la duración.

El inconveniente principal de los polímeros de síntesis es consecuencia de su desgaste por fricción que puede originar la liberación de sustancias tóxicas o irritantes (isicianato de tuloeno, cloruro de vinilo o catalizadores de amínicos), produciendo osteolisis en el hueso. [21]

Tabla 6. Comparación biomateriales

MATERIALES	VENTAJAS	DESVENTAJAS	EJEMPLOS
Polimeros: teflón, dacrón, silicón, nylon	Elasticos, faciles de fabricar, baja densidad	Baja resistencia mecánica, degradación con el tiempo.	Suturas, arterias, venas, nariz, orejas, mandíbulas, dientes y tendones
Metales: 316, 316 LS.S, aleaciones de titanio, aceros de bajo contenido de carbón.	Resistencias a esfuerzos de alto impacto, alta resistencia al desgaste.	Baja biocompatibilidad, corrosión en medios fisiologicos, alta densidad, pérdida de propiedades mecánicas con tejidos conectivos suaves.	Fijación ortopédica: tornillos, clavos, alambres, placas, barras intermodulares, implantes dentales
Cerámicas: óxidos de aluminio, aluminatos de calcio, óxidos de titanio y carbono.	Buena biocompatibilidad, inerte, resistencia a la corrosión y alta corrosión.	Fractura ante esfuerzos de alto impacto, dificil fabricación, baja resistencia mecánica, inelásticos, alta densidad.	Prótesis de cadera, dientes, dispositivos transcutáneos.
Compuestos cerámica metal: Carbon	Buena compatibilidad, inerte, resistente a la corrosión, alta resistencia a los esfuerzos.	Carecen de consistencia en la fabricación del material.	Válvulas cardiacas, uniones óseas, marcapasos.

Fuente: Zygmunt Haduch. Hernández Marco. BIOMATERIALES: CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES: 2007

6.2 MATERIALES PARA LA FABRICACIÓN DE PRÓTESIS

En el numeral anterior se ha observo los principales materiales que se utilizan en la industria para la fabricación de prótesis e implantes médicos.

Es importante profundizar en los biomateriales más usados en la fabricación de prótesis, y así poder tomar una decisión de cuál es el más óptimo en el diseño.

Las propiedades principales que debe tener este material es una buena resistencia a compresión, buena elasticidad para simular el movimiento del pie en la marcha, buena resistencia a la fatiga, ligero.

A continuación se nombran los materiales más comunes que se han utilizado en la fabricación de prótesis en la historia y algunas de sus propiedades.

Tabla 7. Materiales comunes en protésica

MATERIAL	(ρ)DENSIDAD [Kg/m3]	(E) MÓDULO DE ELASTICIDAD [MPa]
Acero	7850	210000
Aluminio	2694,4	73000
Titanio	4507	120000
Madera medio ligera (cedro)	500	14000
Polímero reforzado con fibra de carbón	2000	165000

Después de validar los valores se observa que algunos de los materiales poseen mejores características.

- **Aluminio**

El aluminio es un material muy utilizado en la ingeniería ya que posee una baja densidad y una alta resistencia a la corrosión. Mediante aleaciones es posible aumentar la resistencia mecánica, además de esto, es buen conductor de la electricidad y del calor.

Tabla 8.Propiedades del aluminio

PROPIEDADES	VALOR	UNIDADES
Resistencia última a tensión	110	MPa
Resistencia última a cortante	70	MPa
Fluencia a tensión	100	MPa
Fluencia a cortante	55	MPa
Módulo de Young	70	GPa
Módulo de rigidez	26	GPa
Coeficiente de expansión térmica	23,6	10 E-6 / °C

- **Nitinol**

El Nitinol es una aleación de Níquel y Titanio, este material posee propiedades de memoria de forma. La memoria de forma se manifiesta cuando, después de una deformación plástica, el material recupera su forma tras un calentamiento suave.

- **Polímero reforzado con fibra de carbón.**

Los polímeros son reconocidos como plásticos, tienen versatilidad para deformarse, pueden soportar altas temperaturas y la materia prima proviene de los derivados del petróleo.

Las fibras de carbono provienen principalmente poliacrilonitrilo (PAN), que es un polímero de tipo acrílico. Las fibras de carbono son de alta resistencia y alto módulo de elasticidad y constan de pequeñas cristalitos de grafito.

Tabla 9. Propiedades del polímero reforzado con fibra de carbón

PROPIEDADES	VALOR	UNIDADES
Densidad	1600	[Kg/m3]
Módulo de elasticidad	165000	MPa
Radio de Poisson´s	0,22	
Resistencia a la tracción	2800	MPa
Esfuerzo ultimo de tensión	230000	MPa
Calor específico	-180 a 500	°C
Coeficiente de expansión térmica	-0,7	10 E-6 / °C

- **Polímero reforzado con fibra de vidrio.**

La fibra de vidrio es el refuerzo más utilizado en la fabricación de materiales compuestos para las aplicaciones industriales; por sus buenas características mecánicas y su bajo costo.
La fibra de vidrio está formada fundamentalmente por sílice, que se asocia a diversos óxidos (alúmina, alcalinos y alcalinotérreos), y se obtienen por fusión de la mezcla de estos materiales, pasando por la hilera y sometiéndose a una operación de estirado. [22]

Entre las propiedades más sobresalientes que presentan los polímeros reforzados con vidrio GFRP, están:
• Alta adherencia fibra-matriz.
• Resistencia mecánica, tracción/densidad, superior a la del acero.
• Es aislante eléctrico aún en espesores reducidos.
• La fibra de vidrio es incombustible por naturaleza.
• Poco sensible a las variaciones de temperatura.
• Crea un puente de unión entre el vidrio y la matriz, lo que le confiere la posibilidad de asociarse a numerosas resinas sintéticas, así como a ciertas matrices minerales, tales como el yeso o el cemento.
• Es insensible a la acción de los roedores y de los insectos.
• La utilización de los materiales compuestos en la industria de la construcción permite suprimir los puentes térmicos, dando lugar a un considerable ahorro de calefacción.
• Excesiva flexibilidad.
• Bajo costo.

6.3 SELECCIÓN DE CRITERIOS

Los criterios de selección para el análisis de las alternativas de materiales protésico serán los siguientes:

-**Costo:** Criterio que considera la inversión inicial, para la fabricación de la prótesis de pie y sus componentes. La forma de evaluación será asignar al mayor costo el puntaje

más bajo, y así sucesivamente, de tal forma que la alternativa con menor costo tendrá el puntaje más alto.

-**Estabilidad:** Mayor o menor grado de equilibrio que se tiene cuando el usuario está en la marcha humana.

-**Inercia del sistema:** Se considera la energía que requiere cada mecanismo para poder vencer la inercia propia de la prótesis e iniciar la marcha. Dado que una mayor inercia, requerirá una potencia adicional más alta, se asignara el mayor valor a aquella alternativa que posea una menor inercia y el menor valor al que posea una mayor inercia.

-**Mantenimiento:** Costos que requiere el mantenimiento preventivo para el adecuado funcionamiento de cada una de las alternativas. Para este criterio se dará el menor valor si se requiere un mantenimiento costoso y dispendioso.

-**Seguridad:** Debido a que el usuario estará en constante movimiento, la prótesis recibirá diferentes impactos y cargas, por lo cual es necesario que el material soporte estos esfuerzos. El material que ofrezca mayor seguridad se le asignara el valor más alto.

-**Vida útil:** Se refiere a la durabilidad que tiene la prótesis al ser diseñada con cada uno de los materiales. La vida útil más larga, tendrá la puntuación mayor.

-**Fabricación:** Mayor o menor complejidad en el proceso de manufactura de la prótesis con cada una de las alternativas. La alternativa con menor complejidad en el proceso de manufactura tendrá mejor calificación.

-**Confort:** Mayor o menor impacto sobre el usuario que utilice la prótesis, en este caso que el material se adecue a la morfología del muñón y sea cómodo al usarlo. La variable con menor impacto tendrá una mayor calificación.

6.3.1 ponderación

Tiene como objetivo la asignación de una ponderación para cada criterio mediante una escala de 1-5 puntos, dependiendo del peso de relevancia de la variable, donde:

1. Muy poco importante
2. Poco importante
3. Importancia media.
4. Algo importante
5. Muy importante

6.3.2 criterios de desempeño

Consiste en establecer un valor de complacencia o desempeño para cada alternativa, se emplea una escala de 1-9, donde:

1. Extra Bajo.
2. Muy Bajo.

3. Bajo.
4. Poco Bajo.
5. Medio.
6. Poco Alto.
7. Alto.
8. Muy Alto.
9. Extra Alto.

6.3.3 Puntuación

Calcular el puntaje para cada una de las alternativas. La alternativa con el puntaje más alto representa la alternativa a seleccionar. El modelo para calcular el puntaje es:

$$S_J = \sum_{i=1}^{n} W_i * r_{ij}$$

Donde:

$S_j = Puntuación\ para\ alternativa$

$W_i = Ponderación\ para\ cada\ criterio$

$r_{ij} = Valoración\ o\ calificación\ de\ la\ alternativa\ j\ en\ función\ del\ criterio\ i.$

6.3.4 ANÁLISIS DE LA PRÓTESIS DE PIE

La prótesis de pie debe permitir que el usuario (amputados por debajo de la rodilla) pueda mantenerse en pie y además de esto le permita desplazarse, simulando la marcha humana.
La prótesis debe estar diseñada con estándares de seguridad, esto permite evitar cualquier accidente al momento de que el usuario utilice la prótesis.
El mantenimiento y cuidados que debe tener la prótesis deben ser los más mínimos para facilitar la manipulación por parte del usuario, estos deben ser:

- Facilidad de limpieza de la prótesis, sin generar deformaciones en la misma o desgastes.
- Fácil ensamblaje y fácil empalme de usuario-prótesis.

Por otro lado el diseño debe simular la estructura del pie, permitiendo al usuario una fácil adaptación.

Las propiedades principales que debe tener este material la conservación de sus características físicas al contacto con el ser humano, la garantía de resistencia mecánica, ser biológicamente inerte, no cancerígeno y estéril.
Además de lo anterior debe tener buena resistencia a compresión, buena elasticidad para simular el movimiento del pie en la marcha, buena resistencia a la fatiga, ligero.

Para la selección de las cuatro alternativas, fue necesario realizar un análisis con varios materiales, donde los más factibles fueron aquellos que en sus características físicas se acercaron más a los requerimientos del material para el diseño de la prótesis.

A continuación se crea una tabla con las características de las cuatro alternativas de materiales, entre los cuales se seleccionaron 2 metales no ferrosos, y 2 materiales compuestos con base polimérica.

Tabla 10. Análisis de materiales protésicos

MATERIAL PROTÉSICO	PROPIEDADES MECÁNICAS	DENSIDAD	COSTO	VENTAJA	DESVENTAJA
ALTERNATIVA 1. ALEACIONES CON BASE DE COBALTO	*Módulo de Young=116 GPa *Limite elástico=345-485MPa *Resistencia a la tracción=434 MPa [34,35]	8,9 g /cm3	-	Resistencia a la corrosión, Resistencia al desgaste	Alto costo, alta densidad, dificil maquinado por la dureza
ALTERNATIVA 2. TITANIO	*Módulo de Young (E)= 90-120 Gpa *Limite elástico=250-1245 MPa *Resistencia a la tracción=300-1625 MPa *Tenacidad a la fractura=14-120 [33]	4,8 g/cm3	67-74 Euro/Kg	Resistencia a esfuerzos de alto impacto, alta resistencia al desgaste.	Bajo modulo de elasticidad, Baja resistencia a la fricción, Baja resistencia mecanica
ALTERNATIVA 3. POLÍMERO REFORZADO CON FIBRA DE VIDRIO	*Módulo de Young (E)= 15-28 Gpa *Limite elástico=110-192 MPa *Resistencia a la tracción= 138-241 MPa *Tenacidad a la fractura=7-23 [33]	1,97 g/cm3	19-21 Euro/Kg	Bajo costo, alta resistencia mecánica, baja densidad	Alta complejidad en la fabricación, bajo modulo de elasticidad, sensible al maquinado
ALTERNATIVA 4. POLÍMERO REFORZADO CON FIBRA DE CARBÓN	*Módulo de Young (E) =69-150 GPa *Limite elástico=550-1050 Mpa *Resistencia a la tracción=550-1050 * Tenacidad a la fractura=6,1-88 MPa [33]	1,6 g/cm3	40-44 Euro/Kg	Elástico, fáciles de fabricar, baja densidad	Costo elevado, degradación con el tiempo

Todas las propiedades mecánicas y costos utilizadas en la creación del cuadro están basadas en los libros y artículos creados por Mike Ashby. [23], [24], [25]

Debido a la escasa bibliografía sobre las aleaciones de cobalto, las propiedades descritas en la primera fila del cuadro hacen referencia al Cobalto puro ya que en las aleaciones más del 65% es cobalto (Co).

6.3.5 SELECCIÓN DE CRITERIOS Y PONDERACIÓN

Los criterios de selección para el análisis de las alternativas serán las siguientes:

Tabla 11. Ponderación de criterios de la prótesis de pie.

CRITERIO	PONDERACIÓN
Costos	3
Inercia	4
Mantenimiento	3
Seguridad	5
Vida Útil	4
Fabricación	5
Comodidad	4

Tabla 12. Método de ponderación lineal Prótesis de pie.

CRITERIO	PONDERACIÓN W_i	ALTERNATIVA			
		1	2	3	4
		ALEACIÓN Co	TITANIO	GFRP	CFRP
Costos	3	3	2	8	5
Inercia	4	5	4	7	9
Mantenimiento	3	5	6	8	9
Seguridad	5	5	4	6	9
Vida Util	4	8	9	7	7
Fabricación	5	5	4	6	8
Confort	5	5	6	8	9
TOTAL S_j: $S_j = \sum_{i=1}^{n} W_i * r_{ij}$		142	140	180	**221**

Después de realizada la ponderación se observa que la alternativa más apropiada de las cuatro opciones identificadas es el Polímero reforzado con fibra de Carbón ya que obtuvo la mayor puntuación.

Este material demostró con sus características que cumple los requerimientos para el diseño y fabricación de la prótesis, ya que genera confiabilidad, confort y seguridad, posee una vida útil bastante elevada y su mantenimiento por parte del usuario es bastante sencilla.

Al ser este el material más apropiado se puede proceder a realizar los modelos y diseños de la prótesis de pie en CAD.

6.4 SELECCIÓN DEL MATERIAL

Después de analizar los materiales descritos anteriormente, se observó que los que poseen las mejores características para la fabricación de la prótesis de pie tipo Flex son polímeros reforzados (FRP).

Los Polímeros reforzados tienen grandes propiedades mecánicas que permiten un diseño de la prótesis más óptimo.
Son materiales ligeros y resistentes, además entre sus propiedades se observa que tienen un excelente comportamiento frente a la corrosión y el desgaste; por otro lado son materiales con un buen aislamiento térmico, acústico y eléctrico.

En el desarrollo del proyecto no se hará un prototipo físico por lo cual se optó por tomar como material de diseño el polímero reforzado con fibras de carbono (CFRP), ya que este posee mejores propiedades físicas y mecánicas que permitirán diseñar la prótesis tipo Flex con las mejores características. A pesar de que los polímeros reforzados con fibra de vidrio son más económicos, estos presentan problemas de fatiga y de flujo plástico.

6.4.1 Polímero reforzado con Fibra de carbón

Este material fue diseñado originalmente para aplicaciones aeroespaciales y de defensa (partes de aviones y misiles), pero actualmente es utilizados en diversas industrias de la ingeniera. La industria que más utiliza este material es la deportiva, ya que es utilizado en diferentes productos como cañas de pescar, tablas de surf, raquetas y por supuesto PRÓTESIS DEPORTIVAS, como las utilizadas en las carreras de atletismo.

Los CFRP son materiales fabricados a partir de fibra de carbono y resina epoxi.
Entre las propiedades que posee este material esta:

- Fibras con alta resistencia a la tracción (HT), buena resistencia a la compresión.
- Elevado módulo de elasticidad (HM).
- Baja densidad
- Baja resistencia al impacto.
- Elevada resistencia a altas temperaturas
- Coeficiente de dilatación térmica prácticamente nulo
- Impermeabilidad al agua
- Elevada resistencia a la corrosión
- Sensibilidad a la abrasión
- Bajo alargamiento a la rotura
- Resistencia a la fatiga elevada. (la más alta conocida hasta el momento).

6.4.2 Fibras de carbono

Las fibras de carbono provienen principalmente del poliacrilonitrilo (PAN), que es un polímero de tipo acrílico. Las fibras de carbono son de alta resistencia y alto módulo de elasticidad y constan de pequeñas cristalinas de grafito. Es un monocristal de grafito, los átomos de carbono se ordenan en redes hexagonales. [26]

Las fibras de carbono presentan características como:

- Alto módulo de elasticidad
- Menor coeficiente de dilatación térmica (aproximadamente 50 veces más bajo que el del acero)
- Excelente resistencia a la fatiga
- Excelente resistencia a ataques químicos
- Resistencia a la corrosión
- Resistencia a la Hielo/Deshielo y a las sales de deshielo
- Baja densidad
- Resistencia a la vibración

FIGURA 30. Fibras de carbono

Fuente: **http://tecnologiadelosplasticos.blogspot.com.co**

6.4.3 Propiedades mecánicas a largo plazo

- **Resistencia a la fluencia**

El comportamiento frente al creep (rotura bajo carga mantenida) de los CFRP es muy superior al de los materiales compuestos. Esto ha sido comprobado en varios ensayos. En un ensayo realizado con barras de CFRP en una solución salina no se registró ningún fallo en las barras al mantener la solicitación, aun nivel del 70% de su resistencia a la tracción a corto plazo, después de 10000 horas. [8]

En casos habituales de refuerzo con CFRP el esfuerzo de tracción bajo carga de servicio permanente suele alcanzar valores máximos del 20% del valor de la resistencia a corto plazo.

- **Resistencia a la fatiga**

Los materiales compuestos FRP constituidos por fibras de carbono presentan una elevada resistencia a la fatiga. En ensayos realizados en Japón con tensiones máximas hasta el 87,5% de la resistencia de tracción a corto plazo y con amplitudes de hasta 1000 MPa, se alcanzaron más de 4E6 ciclos de carga.

- **Fluencia y relajación**

La fluencia y relajación expresan el comportamiento viscoelástico del material. En el caso de materiales compuestos, es posible distinguir entre fluencia debido al esfuerzo axial en las láminas y fluencia interlaminar.

Las fibras de carbono, por si solas, no presentan fluencia notable o pérdida de tensión como resultado de la relajación, bajo los niveles de carga mantenida predominante en estado de servicio. En contraste, la matriz de resina de epoxi es un material viscoelástico aunque se puede considerar que la matriz de resina utilizada es elásticolineal hasta un valor de la deformación por tracción más o menos al 20%.

6.4.4 Propiedades físico-químicas

- **Durabilidad**

Los CFRP tienen una muy buena resistencia a los ataques químicos. En ensayos bajo niveles de tensión permanente del 5 al 75%, a temperaturas entre 21 a 80 ° C y sometida a líquidos de pH entre 10- 13.5 durante un periodo de tres meses no se observó ninguna reducción de la resistencia rasante interlaminar. [8]

6.4.5 Propiedades térmicas

Las fibras de carbono tienen alta resistencia al calor. El punto de transición vítrea de la matriz de resina es T_{GM}= 100 – 130 °C. Sin embargo, la capacidad de carga del sistema compuesto viene determinada por el adhesivo, el cual tiene un punto de transición vítrea de T_{GK}=±47 °C.

El diseño de la prótesis de pie está basado en los modelos Flex Foot, los cuales generan un mayor confort y menores esfuerzos para el amputado.
Este diseño se utilizara posteriormente para hacer las simulaciones y pruebas de esfuerzos.

La prótesis de pie diseñada no tiene articulaciones de tobillo ni de falanges, por lo cual solo se tendrá un grado de libertad.

Para el diseño se realizaron varios modelos y cada uno de ellos fue puesto a pruebas estáticas simulando cargas, estas pruebas fueron desarrolladas en el programa Solid Works para validar las deformaciones y los esfuerzos.

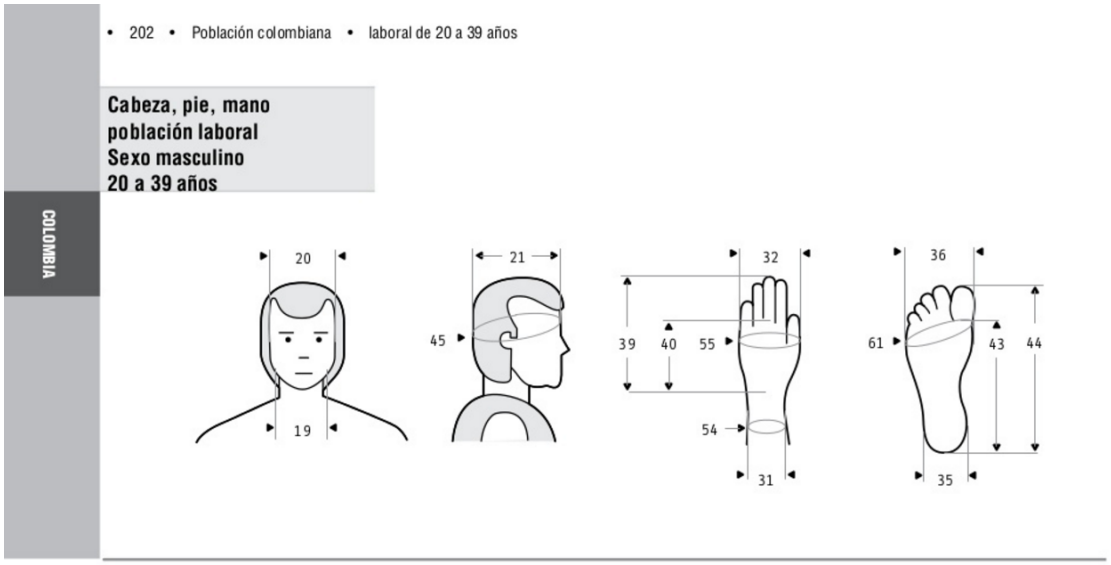
7.1 DIMENSIONES PRÓTESIS DE PIE

Para la dimensiones de la prótesis de pie se utilizó como base los datos antropométricos que se encuentran en la obra “Dimensiones antropométricas de población latinoamericana” de la Universidad de Guadalajara.

En esta obra se observa todas las dimensiones del cuerpo humano, categorizado por hombres, mujeres, edad y nacionalidad.

En el diseño de la prótesis se tomaron los valores de la tabla “Cabeza, pie, mano población laboral sexo masculino”; en donde se observa las dimensiones promedio del pie de un hombre colombiano de entre 20 y 39 años de edad.

FIGURA 31. Dimensiones antropométricas



Fuente: **Ávila R., Prado I., González E. Dimensiones antropométricas de población latinoamericana. Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de Arte, Arquitectura y Diseño; Segunda ed. 2007**

Tabla 13. Dimensiones antropométricas

Dimensiones		20 - 29 años (n= 487)					30 - 39 años (n= 447)				
				Percentiles					Percentiles		
		$\bar{x}$	D.E.	5	50	95	$\bar{x}$	D.E.	5	50	95
19	Anchura de la cara	13.9	0.58	13.0	14.0	15.0	14.0	0.59	13.1	14.0	15.1
20	Anchura transversal cabeza	15.4	0.57	14.5	15.4	16.5	15.5	0.60	14.6	15.5	16.5
21	Anchura antero-post. cabeza	18.9	0.74	17.7	18.9	20.1	18.9	0.79	17.6	18.9	20.2
31	Anchura de muñeca	5.4	0.31	4.9	5.4	6.0	5.5	0.31	5.0	5.5	6.0
32	Anchura de mano	8.3	0.39	7.7	8.4	9.1	8.3	0.39	7.7	8.4	9.0
35	Anchura de talón	6.6	0.49	5.9	6.7	7.5	6.8	0.45	6.0	6.8	7.6
36	Anchura de pie	9.8	0.54	9.0	9.9	10.8	9.9	0.52	9.1	9.9	10.8
39	Largura de la mano	18.3	0.90	17.0	18.4	20.0	18.3	0.93	16.8	18.3	19.9
40	Largura palma de la mano	10.3	0.56	9.4	10.3	11.3	10.2	0.57	9.3	10.3	11.2
43	Largura de pie	25.4	1.22	23.5	25.3	27.5	25.2	1.19	23.2	25.2	27.1
44	Largura planta del pie	20.4	1.01	18.7	20.4	22.2	20.3	0.93	18.8	20.4	21.8
45	Perímetro de cabeza	55.3	1.62	52.9	55.4	58.1	55.7	1.77	52.8	55.7	58.9
54	Perímetro de la muñeca	16.2	0.80	14.9	16.2	17.5	16.4	0.79	15.2	16.4	17.9
55	Perímetro metacarpial	20.2	1.02	18.7	20.2	22.0	20.3	0.99	18.7	20.3	22.0
61	Perímetro metatarsial	24.6	1.31	22.6	24.6	26.8	24.8	1.18	23.0	24.8	26.7

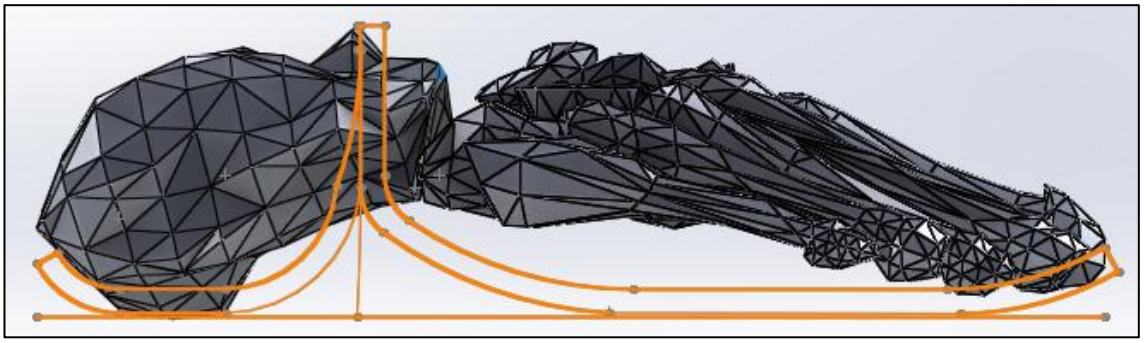
1. Todas las dimensiones se encuentran en cm.
2. En los numerales 35, 36, 43, 44 y 61 se encuentran las dimensiones del pie.

Fuente: **Ávila R., Prado I., González E. Dimensiones antropométricas de población latinoamericana. Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de Arte, Arquitectura y Diseño; Segunda ed. 2007**

7.1.1 Croquizado inicial

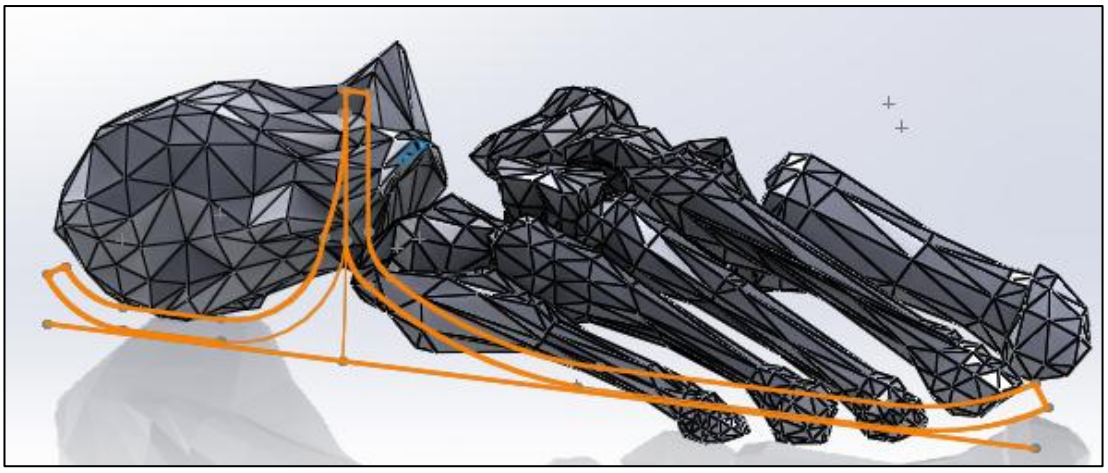
Para el croquis inicial del diseño de la prótesis de pie se utilizó el programa Solid Works y se tomó como base un diseño del pie humano en CAD, en el cual sobre este se realizó el primer plano con las dimensiones ya anteriormente seleccionadas.

FIGURA 32. Croquis Inicial Vista Lateral



En la figura 28 se observa el Croquizado utilizando los puntos más significativos del pie como lo son el punto de conexión con el tobillo, la punta del dedo pulgar, el punto posterior más lejano y el arco formado entre el talón y la base de apoyo.

FIGURA 33. Croquis inicial Vista Dimétrica



7.2 DISEÑO CAD PRÓTESIS PIE

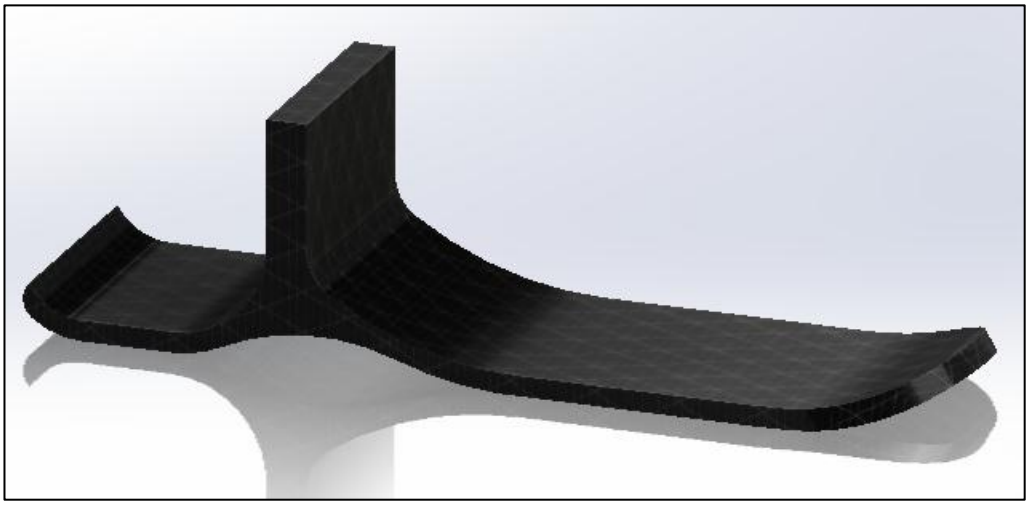
Antes de tener el diseño con el cual se realizarían los cálculos y simulaciones de la prótesis de pie, se realizaron diferentes diseños a los cuales se les aplico un análisis por elementos finitos (FEA) en el programa Solid Works para ver su desempeño al aplicarle una carga similar a la que genera una persona de aproximadamente 75 Kilos.

7.2.1 Diseños iniciales CAD

- **Primer diseño**

El primer diseño realizado no poseía soportes en la línea donde se apoyan las cargas en la prótesis.
Este diseño era simple y se basó principalmente en la forma que tenía el Croquizado inicial.

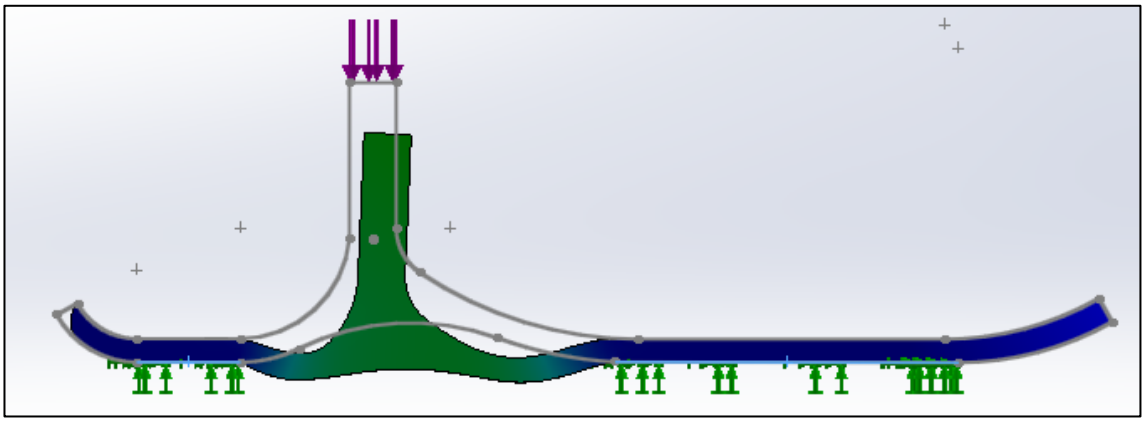
FIGURA 34. Primer diseño prótesis de pie



Al realizar el FEA (análisis por elementos finitos) de este diseño se observó que podría presentar deformaciones muy grandes que afectarían el desempeño de la prótesis.

El FEA se realizó utilizando las propiedades y características del material seleccionado anteriormente.

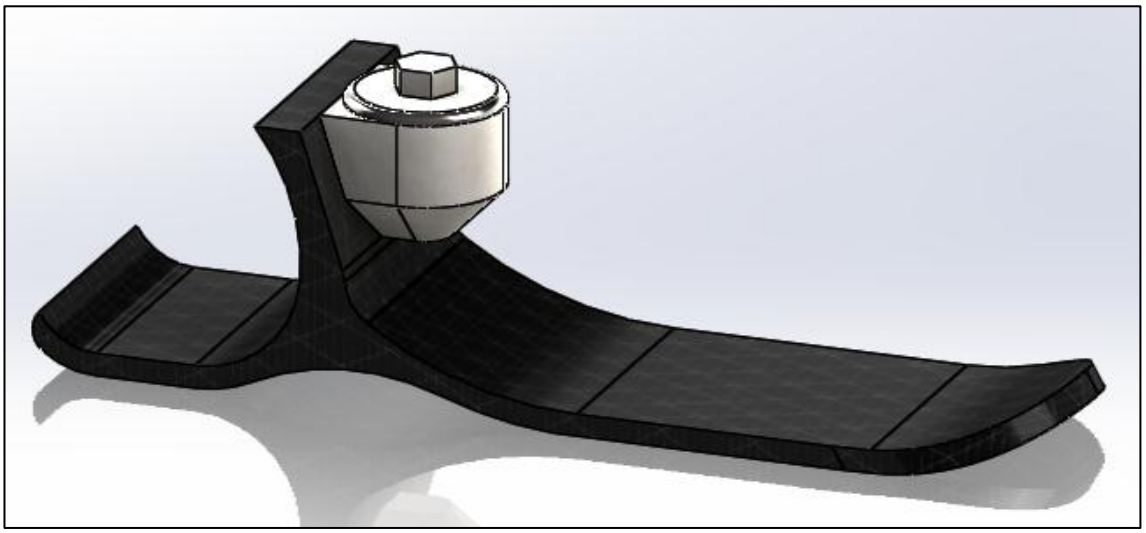
FIGURA 35. FEA Primer diseño prótesis de pie



- **Segundo diseño**

En el segundo diseño se desplazó la línea de apoyo para incluir el tronillo de conexión con el pilar.

FIGURA 36. Segundo diseño prótesis de pie

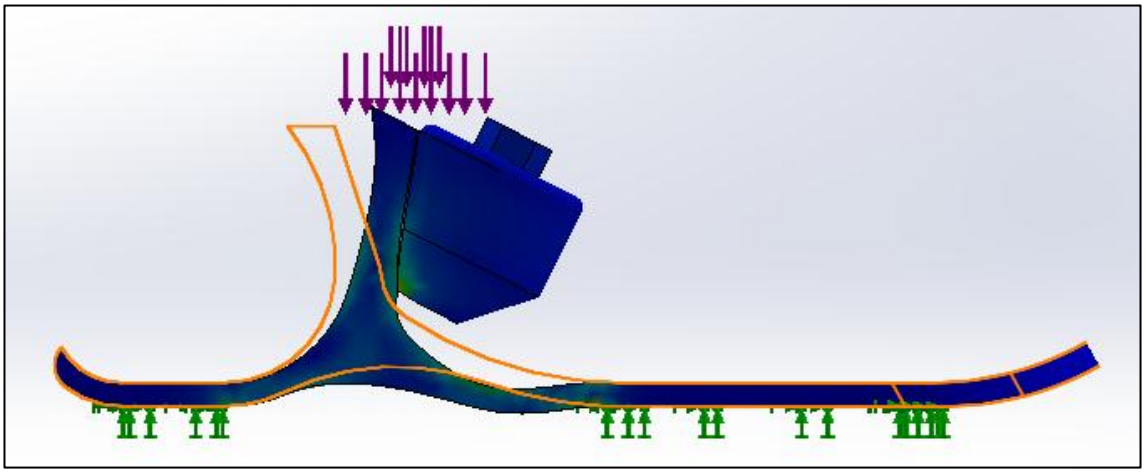


El tornillo está posicionado de tal manera que no afecte el desplazamiento en la marcha y adicionalmente sea relativa a la posición del tobillo en el pie.

Al realizar el FEA a este diseño se aplicaron las cargas directamente sobre el tornillo, ya que en este es donde está la conexión con el pilar.
Las propiedades del acero inoxidable fundido, fueron las utilizadas para el tornillo.

Los resultados del FEA en este diseño mejoraron, pero aun sufría una deformación extensa.

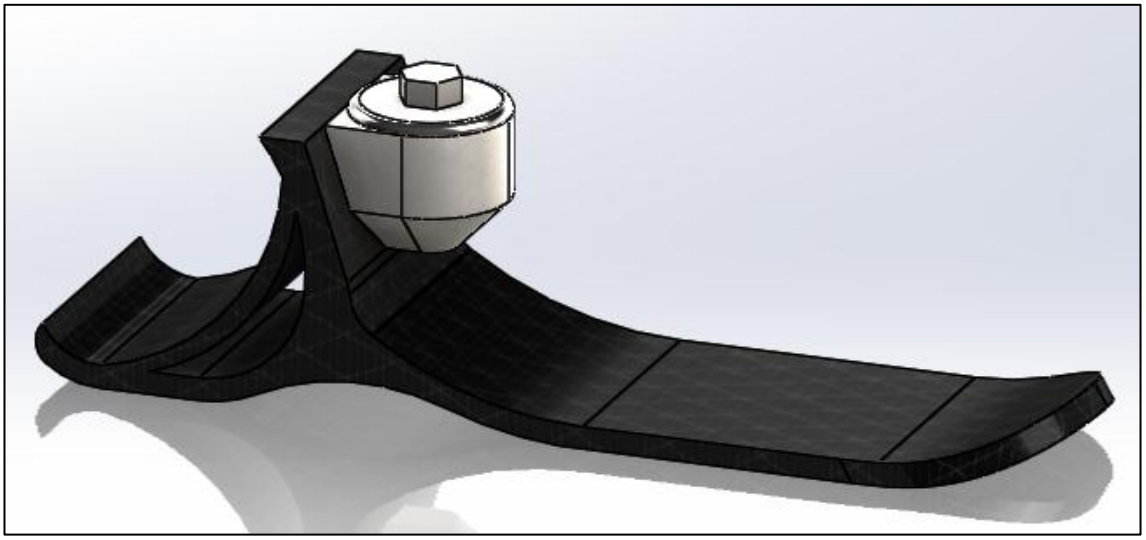
FIGURA 37. FEA segundo diseño prótesis de pie



- **Tercer diseño**

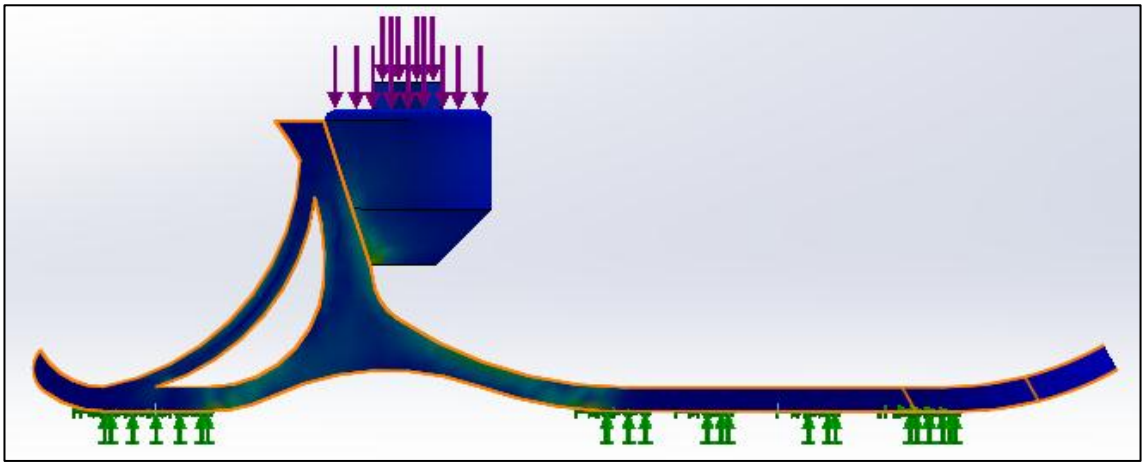
En el tercer diseño se agregó un soporte en la parte posterior de la prótesis para ayudar a evitar las deformaciones excesivas de los diseños anteriores.

FIGURA 38. Tercer diseño prótesis de pie



Después de realizar el FEA en este diseño se observa que no presenta deformaciones excesivas aplicándole una carga de 735,75 N que hacen referencia a una persona con un peso aproximado de 75 Kg.

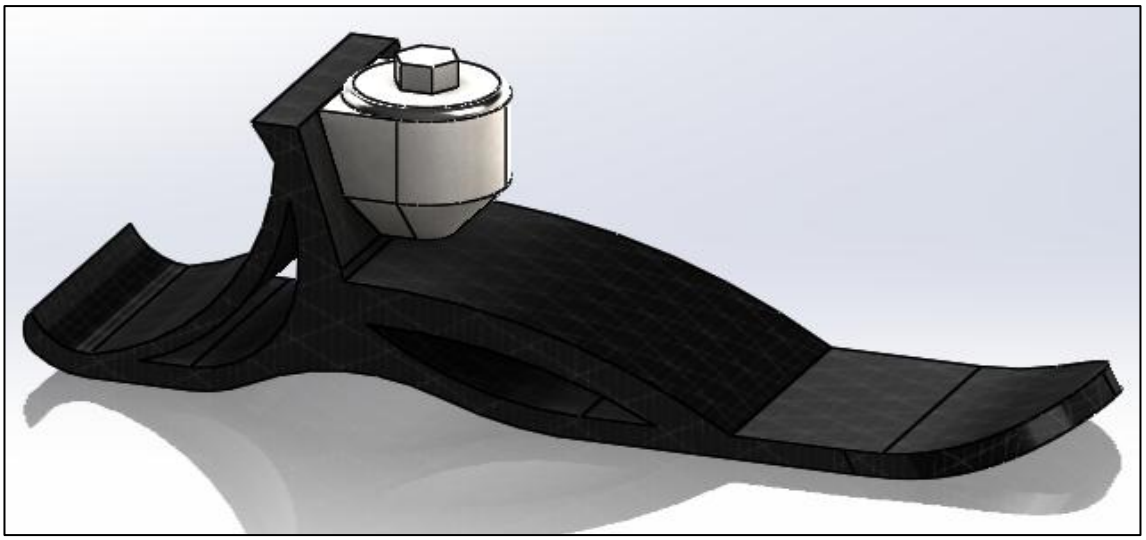
FIGURA 39. FEA tercer diseño prótesis de pie



7.2.2 Diseño final CAD

Después de analizar los diseños anteriormente nombrados, se crea un nuevo diseño colocando un soporte entre la base del pie y la pared de sujeción del tornillo, para evitar alguna deformación en el momento que el usuario este realizando la marcha. Adicionalmente este nuevo soporte le permite soportar mayores cargas para beneficiar las actividades diarias del usuario.

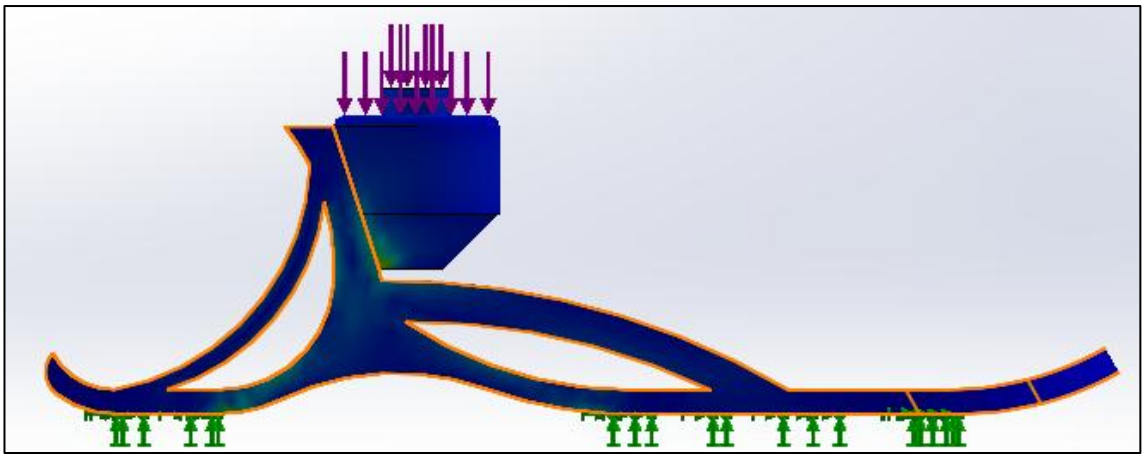
FIGURA 40. Diseño final prótesis de pie



Al igual que los diseños anteriores los materiales utilizados para el diseño final de la prótesis de pie fueron polímero reforzado con fibra de carbono para la estructura del pie y acero inoxidable para el tornillo.

Después de realizado el FEA se observa que al aplicar una carga de 735,75 N no hay deformaciones excesivas y que el diseño puede ser utilizado para las simulaciones de la marcha humana con prótesis de pie.

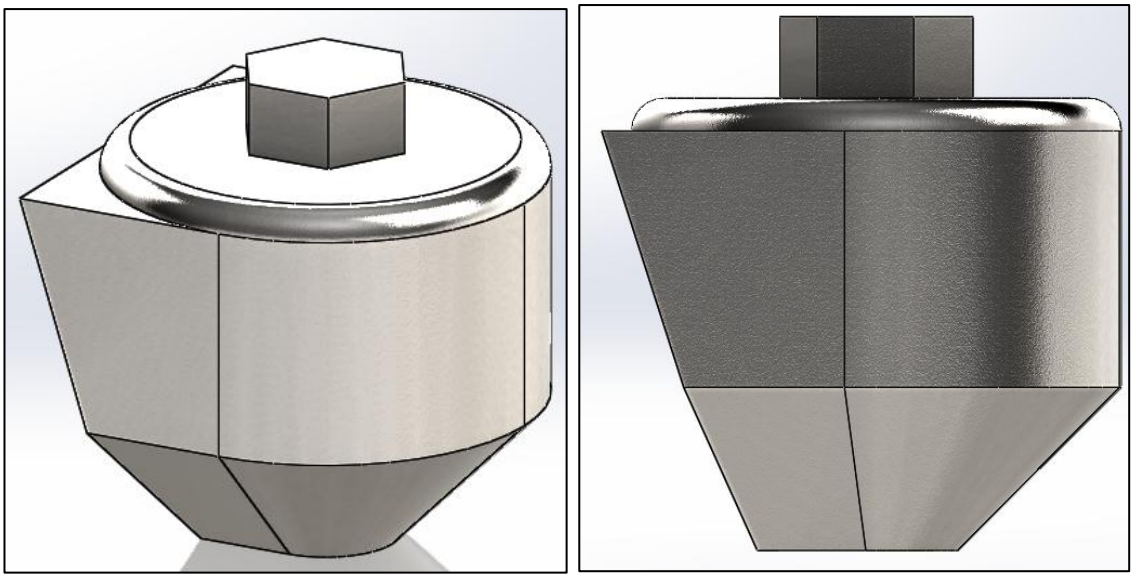
FIGURA 41. FEA diseño final prótesis de pie



7.2.2.1 Diseño tornillo

Para el diseño en CAD del tornillo de sujeción entre el pie y el pilar, se analizó la geometría de tal manera que este pudiera encajar perfectamente con el diseño de la prótesis de pie desarrollada. En la Figura 38 se observa la geometría del tornillo en donde la cara posterior tiene un corte paralelo a la cara frontal de la prótesis.

FIGURA 42. Diseño CAD tornillo



8. SIMULACIÓN DE LA MARCHA CON PROTESIS DE PIE

La simulación de la marcha humana es un procedimiento de gran complejidad y al incluir una prótesis en la emulación esta complejidad aumenta.

Gracias a los software que en la actualidad existen, simular y emular la marcha humana se ha convertido en algo más dinámico y sencillo. En este proyecto se simula la marcha humana utilizando el software OpenSim el cual fue diseñado en la universidad de Stanford por ingenieros y médicos para observar, predecir y corregir la marcha en seres vivos. Este software ha sido utilizado además para el diseño de órtesis y prótesis, ya que permite analizar la marcha humana con gran detalle.

8.1 OpenSim

OpenSim es una plataforma de software para el modelado de los seres humanos, animales, robots y el medio ambiente, y la simulación de su interacción y movimiento. OpenSim tiene una interfaz gráfica de usuario (GUI) para la visualización de los modelos y la generación y el análisis de simulaciones.

OpenSim permite construir modelos de un amplio rango de estructuras musculoesqueléticas y muchos otros mecanismos. Los modelos pueden incluir cualquier combinación de cuerpos rígidos, articulaciones simples y complejas, las limitaciones, los resortes, amortiguadores, contacto, controladores, músculos, y otros actuadores.

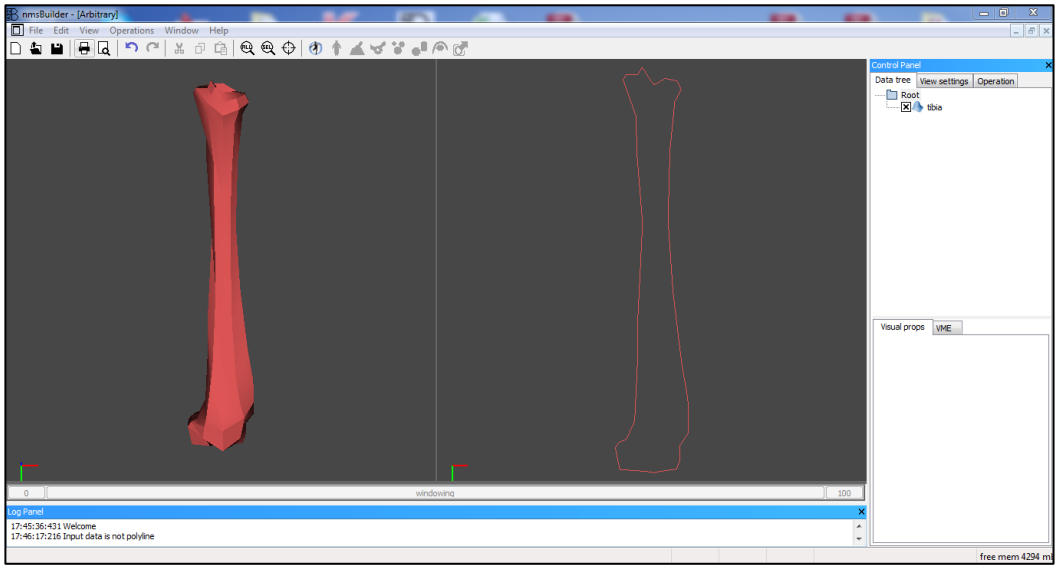
La herramienta de control de los músculos puede generar simulaciones musculares de movimiento guiado. El algoritmo se ha utilizado para simular movimientos como caminar, correr, montar en bicicleta, saltar y la marcha patológica. [27]

8.2 Simulación en OpenSim

Para la simulación de la marcha humana con prótesis en OpenSim fue necesario diseñar una prótesis transtibial en CAD (en este caso utilizando SolidWorks), tomando como base los diseños esqueléticos que tiene OpenSim por defecto.

Fue necesario utilizar 2 diseños de OpenSim para la construcción de la prótesis, uno de ellos hace referencia a la tibia y peroné y el otro diseño hace referencia al pie humano; estos archivos se encuentran en formato ".VTP" por lo cual es necesario hacer una conversión de la extensión del archivo y convertirlo en ".STL" el cual SolidWorks pueda identificar. Para la conversión de los archivos es necesario utilizar un software libre llamado "nmsBuilder" el cual permite introducir y observar diseños de OpenSim y poder convertirlos en diferentes tipos de archivos, pero en este caso convirtiéndolo en un archivo con extensión ".STL". (Figura 43.)

FIGURA 43. Interfaz nms Builder



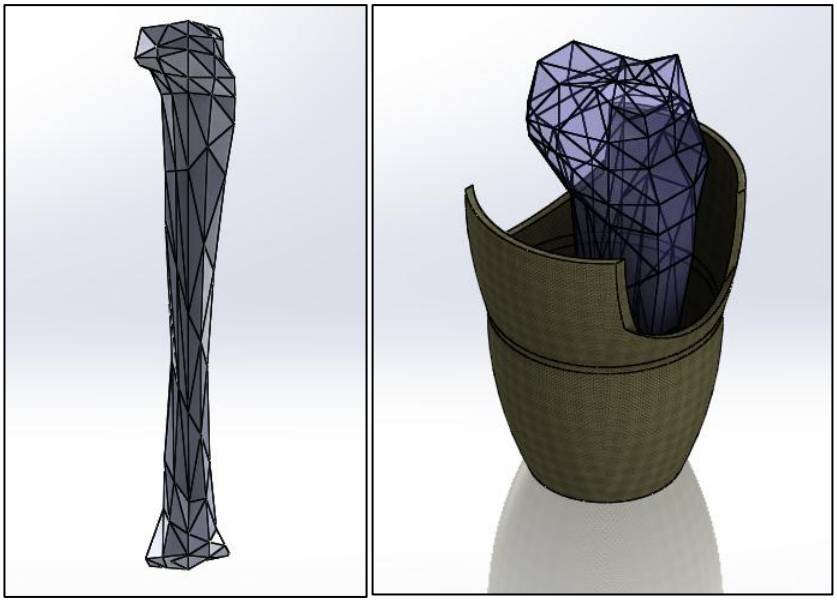
8.2.1 Diseño de prótesis en CAD

Después de convertir los diseños de OpenSim a archivos ".STL", SolidWorks ya puede identificarlos y es posible realizar modificaciones sobre el diseño.

8.2.1.1 Diseño del socket y el pilar

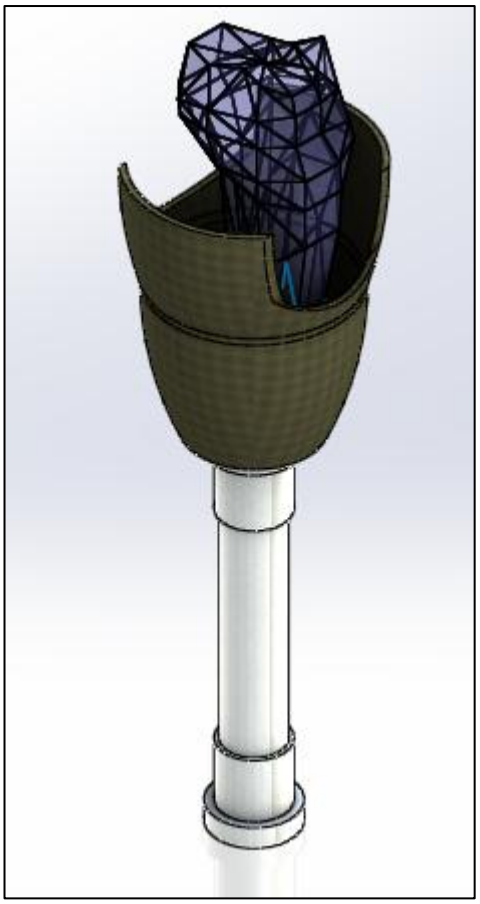
Para el diseño del socket y el pilar de la prótesis se tomó como base el modelo de tibia de OpenSim, sobre este se realizaron las diferentes modificaciones como cortes transversales del hueso y mediciones para el diseño de la prótesis.

FIGURA 44. Tibia y socket



Después de realizadas las mediciones y del diseño del socket, se procede a diseñar el pilar con las dimensiones necesarias para que la longitud de la prótesis sea igual a la de una pierna y evitar cualquier patología en la marcha.

FIGURA 45. Pilar y Socket



8.2.2 Ensamblaje Prótesis y modelo musculoesquelético

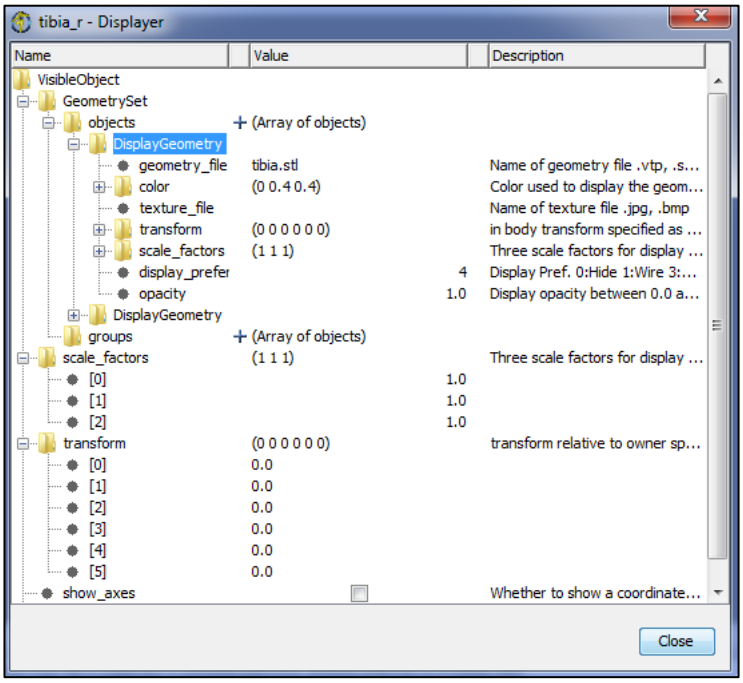
Al finalizar el diseño en CAD del socket y el pilar, se procede a introducir el archivo ".STL" en las librerías de OpenSim. Por otro lado el diseño de la prótesis de pie desarrollada en el capítulo 7 es utilizada también para el ensamble musculoesquelético, donde es necesario cambiar la escala y permitir que las dimensiones sean las óptimas para la simulación.

Para el perfecto funcionamiento de la simulación es necesario modificar las coordenadas de posición de la prótesis y de los músculos en el modelo, esto permitirá que se observe realmente como trabaja el cuerpo humano después de una amputación.

La modificación de las coordenadas se puede realizar de dos maneras en OpenSim:

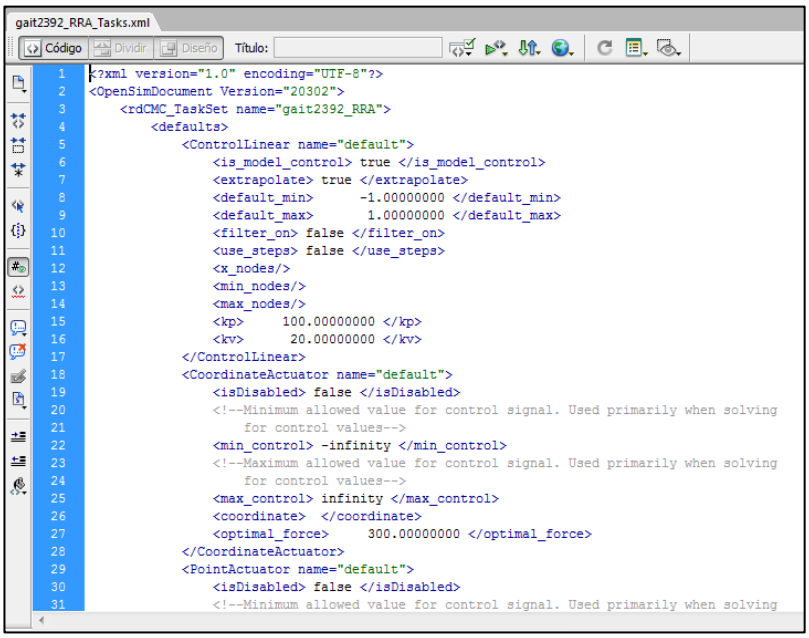
- En la interfaz gráfica, donde al seleccionar el segmento del cuerpo a desplazar se habilita las opciones de propiedades, y entre las opciones se encuentra “Displayer”, que permite configurar y modificar las coordenadas del elemento seleccionado.

FIGURA 46. Displayer OpenSim



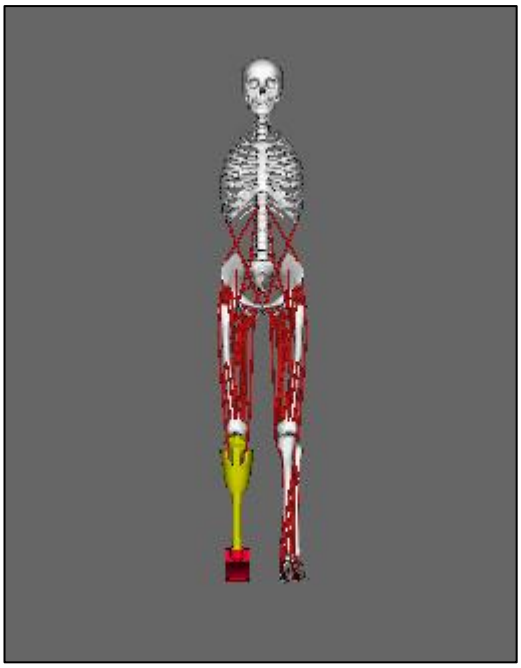
- Modificar el archivo XML del modelo musculo esquelético.

FIGURA 47. Archivo XML.



Al terminar la modificación de las coordenadas de la prótesis y el modelo musculoesquelético se observa el diseño completo, el cual se puede utilizar para la simulación.

FIGURA 48. Ensamblaje prótesis y modelo musculoesquelético



8.2.3 Simulación

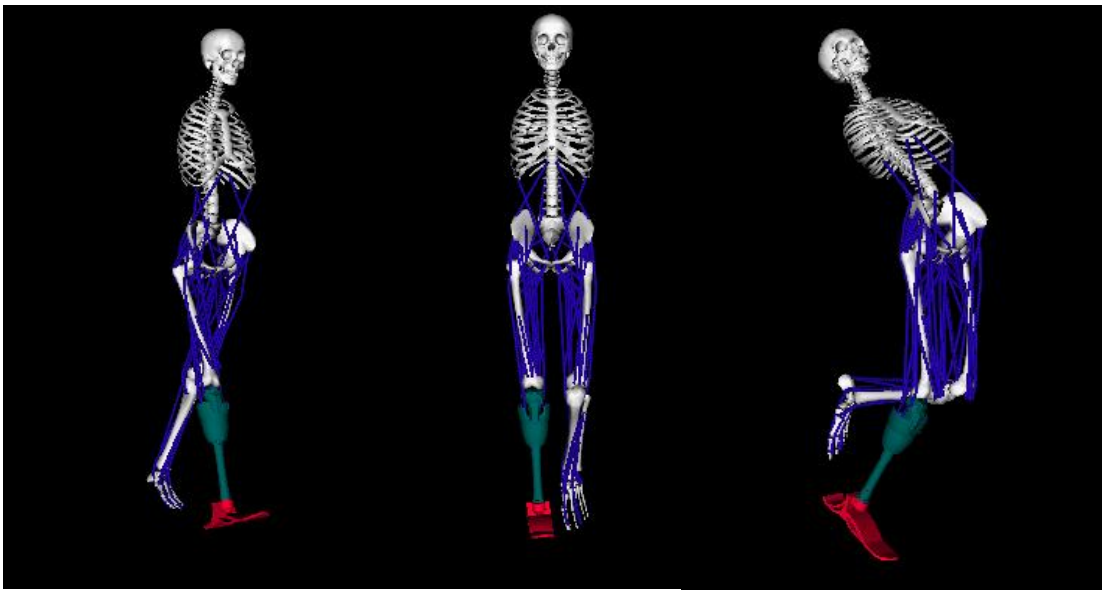
Para realizar la simulación, OpenSim incluye archivos que contienen la dinámica de la marcha humana, los cuales permiten ser modificados para los diseños de los usuarios, en este caso el diseño es el da la marcha con prótesis de píe.

El archivo utilizado fue “Normal.mot” el cual simula la marcha normal sin patologías, este archivo está ligado a las coordenadas de las articulaciones, los huesos, músculos y adicionalmente en este caso a las coordenadas de la prótesis de pie.

Al iniciar la simulación se pueden generar graficas donde se observa los desplazamientos y el cambio en los ángulos de posición de las articulaciones y músculos.

Por otro lado, si es necesario se puede modificar la posición y coordenadas de los huesos para modificar el movimiento del diseño como se observa en la figura 49.

FIGURA 49. Emulación de la marcha



CONCLUSIONES

Se realizó el estudio y análisis de la marcha humana profundizando en sus etapas y fases para comprender su funcionamiento y así realizar el modelo matemático dinámico permitente para la simulación.

Se desarrolló un modelo matemático utilizando la metodología Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de cada uno de los eslabones que representan el cuerpo humano.

Se implementó el modelo matemático en el programa Matlab el cual con su función ode45 permitió la simulación de cada una de las ecuaciones de movimiento utilizando condiciones iniciales y obteniendo como resultado las gráficas de desplazamiento y velocidad en cada uno de los eslabones.

Se realizó el análisis de materiales para determinar cuáles eran los más óptimos para el diseño de la prótesis de pie y se seleccionó el más adecuado utilizando la metodología de criterios y ponderación.

Se diseñó un prototipo de la prótesis de pie en CAD y se realizó la evaluación de desempeño de la prótesis con un análisis por elementos finitos utilizando los complementos de simulación de SolidWorks.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. L. Bado, «HISTORIA DE LA ORTOPEDIA,» 1965.

[2] K. Norton, «Un breve recorrido por la historia de la protesica,» *InMotion,* vol. 17, nº 7, pp. 3-6, Nov/Dic 2007.

[3] adam-root, «Dis-Up,» 25 12 2014. [En línea]. Available: http://www.disup.com/adam-root/. [Último acceso: 2016].

[4] Universidad San Jorge, «Funny Biomechanics,» 2014. [En línea]. Available: http://usjfunnybiomechanics.blogspot.com.co/. [Último acceso: 2016].

[5] XATAKA, «XATAKA,» 22 12 2015. [En línea]. Available: https://www.xataka.com/n/estas-son-las-piernas-roboticas-que-quieren-poner-fin-a-las-discapacidades. [Último acceso: 2016].

[6] Facultad, Prótesica y Ortesica Universidad de Nueva York, «ORTESICA DEL MIEMBRO INFERIOR,» Nueva York, 1986.

[7] É. Viel, «LA MARCHA HUMANA, LA CARRERA Y EL SALTO,» Barcelona, MASSON, 2002, p. 294.

[8] D. G. Oscar Ascencio, «Diseño y Modelamiento de pie para Prótesis de miembro inferior adaptable a prótesis comerciales o estándares, con sistema de amortiguación,» de *Trabajo investigativo*, Bogotá Colombia, Universidad de la salle, Facultad de Ingenieria de Diseño y Automatización, 2004, p. 48.

[9] B. A. Ramos Raidel, *Rehabilitación del Amputado de Miembro Inferior,* Camaguey, Cuba, 2005.

[10] CONSEJO INTERTERRITORIAL DEL SISTEMA NACIONAL DE SALUD, «TOMO III PRÓTESIS EXTERNAS DE MIEMBRO SUPERIOR E INFERIOR,» de *GUIA DESCRIPTIVA DE ORTOPROTESIS*, Valencia Espeña, Solana e Hijos, 2003.

[11] U. R. Lanza Medina, DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UNA PRÓTESIS ORTOPÉDICA MODULAR PARA AMPUTADO TRANSTIBIAL, Sartenejas, 2006.

[12] UdeSantiagoVirtual, «Curso interactivo de robótica industrial.,» Santiago de Chile.

[13] V. M. Zatsiorsky, Kinetics of Human Motion, Pennsylvania United States of America, 2002.

[14] J. C. Cruz Ardila y J. M. Ramirez Escarpeta, «Modelo matemático y herramienta de

simualción de,» *Revista Científica Guillermo de Ocklam,* vol. 10, nº 2, pp. 93-105, 2012.

[15] S. K. H. a. A. J. v. d. B. Jason K. Moore, «An elaborate data set on human gait and the effect of mechanical perturbations,» *PeerJ,* 28 Abril 2015.

[16] B. Angela, Modelo Euler-Lagrange de marcha humana: Simulaciones numéricas y experimentos, San Luis Potosi: Instituto de Investigación Cientifica Y Tecnológica, A.C., 2016.

[17] J. Gil, R. Garrido y M. Melgosa, «Materiales para la reparación y sustitución ósea. Factores de crecimiento y terapia genética en Cirugía Ortopédica y Traumatología,» *Mapfre Medicina (Zar),* vol. 14, nº 1, pp. 51-65, 2003.

[18] E. Marchetti, O. May, J. Girad, H. Hildebrand, H. Migaud y G. Pasquier, «Biomateriales en cirugia ortopédica. EMC-Técnicas quirúrgicas-Ortopedicas y Traumatología,» vol. 2, nº 3, pp. 1-24, 2010.

[19] I. Proubasta, J. Gil Mur y J. Planell, Fundamentos de biomecánica y biomateriales, Madrid: Ergon, 1997.

[20] J. Ballester y J. Sueiro, «Biomateriales y sustitutos óseos en traumatología y cirugía ortopédica,» servicio de publicaiones de la universidad de Cádiz, Cádiz, 2011.

[21] P. Gutierrez , «Una visión histórica de la cirugía ortopédica y traumatológica a través del desarrollo de los bioimplantes,» Uniersidad de Cantabria: Departamento de Enfermeria, Cantabria, 2013.

[22] C. De la cruz, «Resisitencia a la flexión y adherencia en vigas de hormigón armado con barras de polímeros reforzados con FRP.,» Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.

[23] M. F. Ashby, «Data for Engineering Materials. Department of Engineering,» University of Cambridge, Cambridge, 2010.

[24] metals.comparenature.com, «metals.comparenature.com,» [En línea]. Available: http://metals.comparenature.com. [Último acceso: 4 6 2017].

[25] goodfellow, «goodfellow,» [En línea]. Available: http://www.goodfellow.com/S/Cobalto.html. [Último acceso: 2 6 2017].

[26] D. d. j. Betancour Cano y M. L. Garcia Amariles, «POLÍMEROS REFORZADOS CON FIBRA DE CARBON,» prezi, 2015.

[27] National Center For Simulation in Rehabilitation Research, «OpenSim Community,» NCSRR, 2010. [En línea]. Available: http://opensim.stanford.edu/. [Último acceso: 10 1

2017].

[28] Ministerios De Sanidad y Consumo, GUÍA DESCRIPTIVA DE ORTOPRÓTESIS TOMO III; Prótesis externas de miembro superior e inferior, España, 2003.

[29] A. Rigutti, ATLAS ILUSTRADO DE ANATOMIA, Madrid: SUSAETA, 2002.

[30] V. Buitrago, Estudios Ergonométricos, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería mecánica, 1987.

[31] D. Le vay, ANATOMÍA Y FISIOLOGIA HUMANA, PAIDOTRIBO, 2015.

[32] Sobotta, Atlas de Anatomía Humana Vol. 2, panamericana, 2012.

[33] G. Ponce y Ponce de Leon, Anatomía y Fisiología, Universidad Autónoma de Baja California, 2005.

[34] TUSINTOMA, «tuSintoma,» 4 Abril 2015. [En línea]. Available: https://tusintoma.com/articulaciones-del-cuerpo-humano/. [Último acceso: 20 Noviembre 2016].

[35] C. Arce Gonzalez, «arcesw,» Enero 2005. [En línea]. Available: http://www.arcesw.com/. [Último acceso: 20 Noviembre 2016].

[36] A. Root, «dis-up,» 25 Diciembre 2014. [En línea]. Available: http://www.disup.com/adam-root/. [Último acceso: 20 Noviembre 2016].

[37] EcuRed, «EcuRed,» [En línea]. Available: https://www.ecured.cu/Esqueleto. [Último acceso: 20 Noviembre 2016].

[38] C. Carrillo, A. Garzon y H. Suárez, «Diseño y Fabricación de una Prótesis de Pie de Respuesta Dinámica en Fibra,» *IV Latin American Congress on Biomedical Engineering 2007, Bioengineering Solutions for Latin America Health,* vol. 18, nº 1, 2007.

[39] O. J. Pelliccioni Monroy, C. Muller-Karger y M. Virginia Candal, «Evaluación Numérica por Elementos Finitos de Materiales Propuestos Para la Fabricación de una Prótesis de pie Usando Moldeo por Inyección de Plástico,» Caracas, 2014.

[40] U. R. Lanza Medina, DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UNA PRÓTESIS ORTOPÉDIOCA MODULAR PARA AMPUTADO TRANSTIBIAL, Sartenejas: Universidad Simón Bolívar, 2006.

[41] M. Cely, E. Mendoza y R. Arellana, «Diseño y construcción de una prótesis para amputación transfemoral pediátrica con un sistema de desplazamiento vertical, validado por análisis por elementos finitos,» *Revista Prospectiva de la Facultad de Ingenieria,* vol. I,

nº 1, pp. 69-76, 2011.

[42] C. A. Silva Castellanos, *MODELAMIENTO DE LA MARCHA HUMANA CON PRÓTESIS DE MIEMBRO INFERIOR MEDIANTE HERRAMIENTAS DE SIMULACIÓN DINÁMICA ("UNA APLICACIÓN EN OPENSIM"),* Bogotá: Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica Universidad Nacional, 2015.

[43] profesorado de Protesica y Ortesica, de la Escuela de Medicina de la Universidad de New York, *PRCYTESICA DEL MIEMBRO INFERIOR,* New York: Universidad de Nueva York.

[44] F. Hernández Stengele, *Diseño y construcción de prototipo neumático de prótesis de pierna humana,* Cholula, Puebla: Escuela de Ingeniería y Ciencias, Universidad de las Américas Puebla, 2008.

[45] R. Corrao, «PRÓTESIS PARA AMPUTACIONES DEL MIEMBRO INFERIOR,» Buenos Aires.

ANEXO A. CÓDIGO MATLAB DESPEJE DE VARIABLES

```
clc; close all; clear all;

syms m2 m3 l2 lc2  lc3 I2 I3 d2 dd2 ddd2 a2 a3 da2 da3 dda2 dda3 k2 b2
g u6


%------------------- Despeje velocidad angular dda2
A=solve('u6=((m3*lc3^2)+(m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-
a3))+I3)*dda2+((m3*lc3^2)+I3)*dda3+(m3*lc3*sin((2*a2)-a3))*ddd2+((-
2*m3*lc3*(d2+l2)*sin((2*a2)-a3))-
(m3*lc3*(d2+l2)*sin(a3)))*da2^2+(2*m3*lc3*cos((2*a2)-a3))*dd2*da2+(-
2*m3*lc3*cos((2*a2)-a3))*dd2*da3+(m3*lc3*(d2+l2)*sin((2*a2)-
a3))*da2*da3-(m3*lc3*g*sin(a2-a3));',dda3);

u7=(-
m3*lc3*sin((2*a2)+a3))*dda2+(m3*lc3*sin((2*a2)+a3))*A+(2*(m2+m3))*ddd2
+((-m3*lc3*cos((2*a2)+a3))-((m2+m3)*d2)-(m2*lc2)-(m3*l2))*da2^2+(-
m3*lc3*cos((2*a2)+a3))*da3^2+(2*m3*lc3*cos((2*a2)+a3))*da2*da3+(b2*dd2
)-(k2*d2);

B=solve('u7=b2*dd2 - da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - d2*k2 + ddd2*(2*m2 + 2*m3) -
dda2*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) - da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) +
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) - dda2*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2
- a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 -
a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(m3*lc3^2 + I3) +
2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)',ddd2);

C=(u6 + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2
+ l2)) - dda2*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - B*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2))/(m3*lc3^2 + I3);

u5=((m2*(d2+lc2)^2)+(m3*(d2+l2)^2)+(m3*lc3^2)-
(2*m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I2)*dda2+((-
m3*lc3^2)+(m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I3)*C+(-m3*lc3*sin(2*a2-
a3))*B+(4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da2^2+(-
4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-
a3))*da2*da3+((2*m2*(d2+lc2))+(2*m3*(d2+l2))-(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3)))*dd2*da2+(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3))*dd2*da3+(m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da3^2-(m2*lc2*g*sin(a2))-
(m3*l2*g*sin(a2))-(m3*lc3*g*sin(a2-a3));

D=solve('u5=dda2*(I2 + m3*(d2 + l2)^2 + m2*(d2 + lc2)^2 + lc3^2*m3 -
2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) + ((- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3)*(u6 + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
```

```
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) - dda2*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
(lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(u7 + da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - b2*dd2 + d2*k2 + dda2*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) +
da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) - (lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) -
dda2*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2)))/(m3*lc3^2 + I3) - 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)))/(2*m2 + 2*m3
- (lc3^2*m3^2*sin(2*a2 - a3)*sin(2*a2 + a3))/(m3*lc3^2 + I3)) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(m3*lc3^2 + I3) +
da2*dd2*(2*m3*(d2 + l2) + 2*m2*(d2 + lc2) - 2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3)) -
g*l2*m3*sin(a2) - g*lc2*m2*sin(a2) - g*lc3*m3*sin(a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 4*da2^2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2) + da3^2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2) - (lc3*m3*sin(2*a2 -
a3)*(u7 + da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*a2 +
a3)) - b2*dd2 + d2*k2 + dda2*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) +
da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) - (lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) -
dda2*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2)))/(m3*lc3^2 + I3) - 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)))/(2*m2 + 2*m3
- (lc3^2*m3^2*sin(2*a2 - a3)*sin(2*a2 + a3))/(m3*lc3^2 + I3)) -
4*da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)',dda2)

%-------------------- Despeje velocidad angular dda3
E=solve('u6=((-m3*lc3^2)+(m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-
a3))+I3)*dda2+((m3*lc3^2)+I3)*dda3+(m3*lc3*sin((2*a2)-a3))*ddd2+((-
2*m3*lc3*(d2+l2)*sin((2*a2)-a3))-
(m3*lc3*(d2+l2)*sin(a3)))*da2^2+(2*m3*lc3*cos((2*a2)-a3))*dd2*da2+(-
2*m3*lc3*cos((2*a2)-a3))*dd2*da3+(m3*lc3*(d2+l2)*sin((2*a2)-
a3))*da2*da3-(m3*lc3*g*sin(a2-a3));',dda2);

F=(-
m3*lc3*sin((2*a2)+a3))*E+(m3*lc3*sin((2*a2)+a3))*dda3+(2*(m2+m3))*ddd2
+((-m3*lc3*cos((2*a2)+a3))-((m2+m3)*d2)-(m2*lc2)-(m3*l2))*da2^2+(-
m3*lc3*cos((2*a2)+a3))*da3^2+(2*m3*lc3*cos((2*a2)+a3))*da2*da3+(b2*dd2
)-(k2*d2);

G=solve('u7=b2*dd2 - da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - d2*k2 + ddd2*(2*m2 + 2*m3) +
dda3*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) - da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) -
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 - dda3*(m3*lc3^2 + I3) +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)',ddd2); %%

H=(u6 - dda3*(m3*lc3^2 + I3) + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) -
G*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3);
```

```
I=((m2*(d2+lc2)^2)+(m3*(d2+l2)^2)+(m3*lc3^2)-
(2*m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I2)*H+((-
m3*lc3^2)+(m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I3)*dda3+(-m3*lc3*sin(2*a2-
a3))*G+(4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da2^2+(-
4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-
a3))*da2*da3+((2*m2*(d2+lc2))+(2*m3*(d2+l2))-(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3)))*dd2*da2+(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3))*dd2*da3+(m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da3^2-(m2*lc2*g*sin(a2))-
(m3*l2*g*sin(a2))-(m3*lc3*g*sin(a2-a3));

J=solve('u5=dda3*(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) +
((I2 + m3*(d2 + l2)^2 + m2*(d2 + lc2)^2 + lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*a2
- a3)*(d2 + l2))*(u6 - dda3*(m3*lc3^2 + I3) +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - (lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(u7 +
da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - b2*dd2
+ d2*k2 - dda3*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) + da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) +
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 - dda3*(m3*lc3^2 + I3) +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) -
2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)))/(2*m2 + 2*m3 + (lc3^2*m3^2*sin(2*a2
- a3)*sin(2*a2 + a3))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 +
I3)) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 +
m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + da2*dd2*(2*m3*(d2 + l2) +
2*m2*(d2 + lc2) - 2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3)) - g*l2*m3*sin(a2) -
g*lc2*m2*sin(a2) - g*lc3*m3*sin(a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 -
a3) - (lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(u7 + da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 +
m3) + lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - b2*dd2 + d2*k2 - dda3*lc3*m3*sin(2*a2 +
a3) + da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) + (lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 -
dda3*(m3*lc3^2 + I3) + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) - 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)))/(2*m2 +
2*m3 + (lc3^2*m3^2*sin(2*a2 - a3)*sin(2*a2 + a3))/(- m3*lc3^2 +
m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3)) + 4*da2^2*lc3*m3*sin(2*a2 -
a3)*(d2 + l2) + da3^2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2) -
4*da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)',dda3)

%-------------------- despeje velocidad linear ddd2
K=solve('u7=b2*dd2 - da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - d2*k2 + ddd2*(2*m2 + 2*m3) +
dda3*lc3*m3*sin(2*a2 + a3) - da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) -
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 - dda3*(m3*lc3^2 + I3) +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)',dda3);%%

L=(u6 - K*(m3*lc3^2 + I3) + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) -
ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3);
```

```
M=((m2*(d2+lc2)^2)+(m3*(d2+l2)^2)+(m3*lc3^2)-
(2*m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I2)*L+((-
m3*lc3^2)+(m3*lc3*(d2+l2)*cos(2*a2-a3))+I3)*K+(-m3*lc3*sin(2*a2-
a3))*ddd2+(4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da2^2+(-
4*m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-
a3))*da2*da3+((2*m2*(d2+lc2))+(2*m3*(d2+l2))-(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3)))*dd2*da2+(2*m3*lc3*cos(2*a2-
a3))*dd2*da3+(m3*lc3*(d2+l2)*sin(2*a2-a3))*da3^2-(m2*lc2*g*sin(a2))-
(m3*l2*g*sin(a2))-(m3*lc3*g*sin(a2-a3));

N=solve('u5=((- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3)*(u7 +
da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - b2*dd2
+ d2*k2 - ddd2*(2*m2 + 2*m3) + da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) +
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 + da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) + g*lc3*m3*sin(a2 - a3) -
ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) - 2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) - da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) -
2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 + a3)))/(lc3*m3*sin(2*a2 + a3) +
(lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(m3*lc3^2 + I3))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3)) + ((I2 + m3*(d2 + l2)^2 + m2*(d2 + lc2)^2 +
lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2))*(u6 +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) -
((m3*lc3^2 + I3)*(u7 + da2^2*(l2*m3 + lc2*m2 + d2*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*a2 + a3)) - b2*dd2 + d2*k2 - ddd2*(2*m2 + 2*m3) +
da3^2*lc3*m3*cos(2*a2 + a3) + (lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(u6 +
da2^2*(lc3*m3*sin(a3)*(d2 + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) - 2*da2*da3*lc3*m3*cos(2*a2 +
a3)))/(lc3*m3*sin(2*a2 + a3) + (lc3*m3*sin(2*a2 + a3)*(m3*lc3^2 +
I3))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 - a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3)) +
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) -
2*da2*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) -
da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)))/(- m3*lc3^2 + m3*cos(2*a2 -
a3)*(d2 + l2)*lc3 + I3) + da2*dd2*(2*m3*(d2 + l2) + 2*m2*(d2 + lc2) -
2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3)) - g*l2*m3*sin(a2) - g*lc2*m2*sin(a2) -
g*lc3*m3*sin(a2 - a3) - ddd2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3) +
2*da3*dd2*lc3*m3*cos(2*a2 - a3) + 4*da2^2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 +
l2) + da3^2*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2) -
4*da2*da3*lc3*m3*sin(2*a2 - a3)*(d2 + l2)',ddd2)
```

ANEXO B. CÓDIGO MATLAB IMPLEMENTACIÓN ODE45

```
clc; close all; clear all;

m2=8.5; m3=5.185;            %% masas  [kg]
l2=0.54;                     %%longitudes de eslabones [m]
lc2=0.23382; lc3=0.20784;    %%longitud de centros de masa [m]
I2=500; I3=3;                %%inercias
%%d2=x(5);                     %%desplazamientos lineal [m]
%%dd2=x(6);                    %%velocidad lineal [m/s]
%ddd2=;                      %%aceleración lineal [m/s2]
%%a2=x(1); a3=x(3);            %%angulos de los eslabones con respecto
al eje vertical [rad]
%%da2=x(2); da3=x(4);          %%velocidad angular [rad/s]
%dda2=; dda3=;               %%aceleración angular [rad /s2]
k2=0.9;                      %%constantes de resortes
b2=0.9;                      %%constantes de amortiguamiento
g=9.81;                      %%gravedad  [m/s2]
u5=-40;
u6=22;
u7=1;

func=@(t,x)[x(2);(u5 - ((m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3)*(u6 + x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) +
2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - (lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 +
x(5)*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) - (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)))/(m3*lc3^2
+ I3) - 2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(2*m2 + 2*m3 -
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*lc3^2 + I3)) -
x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)))/(m3*lc3^2 + I3) -
x(2)*x(6)*(2*m3*(x(5) + l2) + 2*m2*(x(5) + lc2) - 2*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3))) + g*l2*m3*sin(x(1)) + g*lc2*m2*sin(x(1)) + g*lc3*m3*sin(x(1)
- x(3)) - 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) -
4*x(2)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) -
x(4)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) + (lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 + x(5)*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) - (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)))/(m3*lc3^2
+ I3) - 2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(2*m2 + 2*m3 -
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*lc3^2 + I3)) +
4*x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2))/(I2 + m3*(x(5) +
l2)^2 + m2*(x(5) + lc2)^2 + lc3^2*m3 - ((m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)*(I3 - lc3^2*m3 + lc3*m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2) + (lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(lc3*m3*sin(2*x(1) +
x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3))/(m3*lc3^2 + I3)))/(2*m2 + 2*m3 -
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*lc3^2 +
```

```
I3))))/(m3*lc3^2 + I3) - 2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) -
(lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) +
(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3))/(m3*lc3^2 + I3)))/(2*m2 + 2*m3 -
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*lc3^2 +
I3)));x(4);(u5 - ((I2 + m3*(x(5) + l2)^2 + m2*(x(5) + lc2)^2 +
lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - (lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 +
x(5)*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) -
2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(2*m2 + 2*m3 +
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1)
- x(3))*(x(5) + l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3) - x(2)*x(6)*(2*m3*(x(5) + l2) + 2*m2*(x(5) + lc2) -
2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))) + g*l2*m3*sin(x(1)) + g*lc2*m2*sin(x(1))
+ g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) - 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) -
4*x(2)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) -
x(4)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) + (lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 + x(5)*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) -
2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(2*m2 + 2*m3 +
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)) +
4*x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2))/(I3 - lc3^2*m3 -
((I3 + lc3^2*m3 - (lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(lc3*m3*sin(2*x(1) +
x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*lc3^2 + I3))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)))/(2*m2 + 2*m3 +
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)))*(I2 + m3*(x(5) + l2)^2 +
m2*(x(5) + lc2)^2 + lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) +
lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) + (lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) +
x(3))*(m3*lc3^2 + I3))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3)))/(2*m2 + 2*m3 + (lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) -
x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3)));x(6);(((m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 -
m3*lc3^2 + I3)*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 + x(5)*(m2 + m3) +
lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
```

```
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) -
2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) +
(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*lc3^2 + I3))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)) - u5 + ((I2 + m3*(x(5) + l2)^2
+ m2*(x(5) + lc2)^2 + lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2))*(u6 + x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1)
- x(3))*(x(5) + l2)) - ((m3*lc3^2 + I3)*(u7 + x(2)^2*(l2*m3 + lc2*m2 +
x(5)*(m2 + m3) + lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))) - b2*x(6) + x(5)*k2 +
x(4)^2*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(u6 +
x(2)^2*(lc3*m3*sin(x(3))*(x(5) + l2) + 2*lc3*m3*sin(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) -
2*x(2)*x(4)*lc3*m3*cos(2*x(1) + x(3))))/(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) +
(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*lc3^2 + I3))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)) + g*lc3*m3*sin(x(1) - x(3)) -
2*x(2)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3)) - x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) +
x(2)*x(6)*(2*m3*(x(5) + l2) + 2*m2*(x(5) + lc2) - 2*lc3*m3*cos(2*x(1)
- x(3))) - g*l2*m3*sin(x(1)) - g*lc2*m2*sin(x(1)) - g*lc3*m3*sin(x(1)
- x(3)) + 2*x(4)*x(6)*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3)) +
4*x(2)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) +
x(4)^2*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2) -
4*x(2)*x(4)*lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2))/(((lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3)) - ((m3*lc3^2 + I3)*(2*m2 + 2*m3 +
(lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) + x(3)))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)))/(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) +
(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*lc3^2 + I3))/(m3*cos(2*x(1) -
x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)))*(I2 + m3*(x(5) + l2)^2 +
m2*(x(5) + lc2)^2 + lc3^2*m3 - 2*lc3*m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) +
l2)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3) + ((2*m2
+ 2*m3 + (lc3^2*m3^2*sin(2*x(1) - x(3))*sin(2*x(1) +
x(3)))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 +
I3))*(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 +
I3))/(lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3)) + (lc3*m3*sin(2*x(1) + x(3))*(m3*lc3^2
+ I3))/(m3*cos(2*x(1) - x(3))*(x(5) + l2)*lc3 - m3*lc3^2 + I3)) +
lc3*m3*sin(2*x(1) - x(3)))];
[t,x]=ode45(func, [0 1], [pi/12  0 -pi/2 0 0 0]);

figure (1);
plot(t,[x(:,1)]);
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel(' desplazamiento angular [rad]');

figure (2);
plot(t,[x(:,2)]);
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('velocidad angular [rad/s]');

figure (3);
plot(t,[x(:,3)]);
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('desplazamiento angular [rad]');

figure (4);
plot(t,[x(:,4)]);
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('velocidad angular [rad/s]');
figure (5);
plot(t,[x(:,5)]);
```

```
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('desplazamiento lineal [m]');

figure (6);
plot(t,[x(:,6)]);
grid; xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('velocidad lineal [m/s]');
```